1. Integrali Generalizzati

Esercizio 1.1. Calcolare direttamente quando è possibile, o studiare la convergenza, dei seguenti integrali generalizzati:

(1) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2x+2}$;

(2) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x|\log x|^\alpha} dx$ per $\alpha \in \mathbb{R}_+$;

(3) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{1+x^2} dx$.

Esercizio 1.2 (*). Studiare la convergenza dei seguenti integrali generalizzati:

(1) $\displaystyle\int_0^1 \left(\frac{1-x^2}{x}\right)^\alpha \sin(\sqrt{x})\, dx$ per $\alpha \in \mathbb{R}_+$;

(2) $\displaystyle I(\alpha,\beta) := \int_0^{+\infty} \frac{\sin(x^2)}{(1+x^\alpha)x^\beta} dx$ per $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+$;

(3) $\displaystyle B(\alpha,\beta) := \int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1} dx$ per $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+$;

(4) $\displaystyle \Gamma(\alpha) := \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx$ per $\alpha \in \mathbb{R}_+$.

Osservazione 1.3. Le funzioni B e Γ sono molte note in Matematica e furono studiate da Eulero. Esse prendono il nome, rispettivamente, di *funzione beta* e *funzione gamma*.

Esercizio 1.4 (*). Un integrale generalizzato molto noto è il seguente:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

È bene osservare che la funzione integranda non è elementarmente integrabile. Si deduca, usando questo risultato ed un'opportuna sostituzione, che per ogni $a \in \mathbb{R}_+$ e $b \in \mathbb{R}$ vale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2+bx} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{\frac{b^2}{4a}}.$$

Esercizio 1.5 (*). Siano $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Dimostrare che per ogni $f \in \mathbf{C}^1([a,b])$ vale

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f(x)\sin(nx)dx = 0.$$

2. Equazioni Differenziali (A)

Esercizio 2.1. Calcolare la soluzione dei seguenti *Problemi di Cauchy* associati a equazioni differenziali lineari del primo ordine:

(1) $\dot{y} = \dfrac{2ty}{1+t^2} + kt \quad$ con $y(0) = -1$, $k < 0$;
(2) $\dot{y} = \dfrac{y}{t} + kt^3 \quad$ con $y(-1) = 1$, $k > 0$.

Esercizio 2.2. Risolvere le seguenti equazioni differenziali a variabili separabili e, almeno in qualche caso, tracciare un grafico approssimativo delle soluzioni:

(1) $\dot{y} = \alpha\sqrt{1-\beta y}$ per $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+$;
(2) $\dot{y}(1+y) = 2te^t$;
(3) $\dot{y} = \sqrt{\dfrac{y}{t}}$, con la condizione iniziale $y(1) = 1$.

Esercizio 2.3 (*)**.** Risolvere le seguenti equazioni differenziali del primo ordine seguendo i suggerimenti dati:

(1) $\dot{y} = \dfrac{\sqrt{t^2+y^2}-t}{y}$, $\quad$ [Usare le coordinate polari nel piano (t, y)];
(2) $\dot{y} = \dfrac{t^3+y^3}{ty^2}$, $\quad$ [Usare la sostituzione $x = \frac{y}{t}$].

Osservazione 2.4. Le equazioni del tipo $\dot{y} = f(\frac{y}{t})$ sono dette *omogenee*. Si possono risolvere mediante la sostituzione $x = \frac{y}{t}$.

Esercizio 2.5 (**)**.** Si consideri l'equazione

$$\dot{y} = f(t)y + g(t)y^2 + h(t)$$

dove $f, g, h : I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $h \neq 0$. Le equazioni di questa forma, dette di *Riccati*, non si riescono a risolvere esplicitamente, almeno in generale. Ma se si dispone di una soluzione, sia essa $x = x(t)$, possono essere ridotte alla forma lineare mediante la sostituzione $y = x + \frac{1}{z}$. Dimostrare quest'ultima affermazione. Risolvere quindi le seguenti equazioni:

(1) $\dot{y} = t^2y^2 - t^4 + 1$, $\quad$ [Provare con $x = t^\alpha$];
(2) $\dot{y} = y\tan t + y^2\cos t + \dfrac{1}{\cos t}$, $\quad$ [Provare con $x = \alpha(\cos t)^m$].