1. Equazioni Differenziali (B)

Esercizio 1.1. Calcolare la soluzione generale delle seguenti equazioni differenziali lineari del secondo ordine a coefficienti costanti:
(1) $\ddot{y} + 4\dot{y} + 13y = 0$;
(2) $\ddot{y} - ky = 0, \quad k \neq 0$.

Esercizio 1.2. Calcolare la soluzione dei seguenti problemi di Cauchy:
(1) $\ddot{y} - 5\dot{y} + 4y = 0 \quad \text{con} \quad y(0) = 5,\ \dot{y}(0) = 8$;
(2) $\ddot{y} + \pi^2 y = 0 \quad \text{con} \quad y(0) = 0,\ \dot{y}(1) = 0$.

Esercizio 1.3. Calcolare la soluzione generale delle seguenti equazioni differenziali:
(1) $\ddot{y} - \dot{y} + y = t^3 + 6$;
(2) $\ddot{y} + \dot{y} = \sin^2 t$.

Esercizio 1.4. Calcolare la soluzione dei seguenti problemi di Cauchy:
(1) $\ddot{y} + \dot{y} - 6y = te^{2t}$, con $y(0) = 0$ e $\dot{y}(0) = 0$;
(2) $\ddot{y} + y = \tan t$, $t \in (-\pi/2, \pi/2)$, con $y(0) = 0$ e $\dot{y}(0) = 0$.

Esercizio 1.5 (*)**.** Integrare l'equazione differenziale $\ddot{y} + \omega^2 y = A\sin(pt)$, dove $\omega, A, p \in \mathbb{R}$. Si studino separatamente i casi $p \neq \omega$ e $p = \omega$.

Esercizio 1.6 (*)**.** Sia $y \in C^2(\mathbb{R})$ la soluzione dell'equazione differenziale $\ddot{y} - 6\dot{y} + 9y = e^{3t}$ con le condizioni iniziali $y(0) = 1$ e $\dot{y}(0) = 1$. Si calcoli il seguente limite:

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{y(t)}{te^{3t}}.$$

Esercizio 1.7 (**)**.** Risolvere, effettuando un'opportuna sostituzione, la seguente equazione differenziale del terzo ordine:

$$y''' - \frac{y''}{(1+x)^3} = 0, \quad x > -1.$$

2. Curve

Esercizio 2.1. Si scrivano le equazioni delle rette tangenti alle seguenti curve nei punti indicati:

(1) $x(t) = 1 - \arctan t,\ y(t) = 1 - t^2, \qquad (1 - \frac{\pi}{4}, 0)$;
(2) $x(t) = \sin^{\frac{2}{3}}(t),\ y(t) = \cos^{\frac{2}{3}}(t), \qquad \left(\frac{1}{\sqrt[3]{4}}, \sqrt[3]{\frac{3}{4}}\right)$.

Esercizio 2.2 (*)**.** Di seguito sono elencate alcune equazioni di curve molto note. Studiarle, rappresentandole anche graficamente. I parametri $a, b > 0$ sono fissati.

(1) Ramo d'iperbole: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, $x > 0$, ossia $x(t) = a\cosh t$, $y(t) = b\sinh t$, $t \in \mathbb{R}$;
(2) Cicloide: $x(t) = a(t - \sin t)$, $y(t) = a(1 - \cos t)$, con $t \in \mathbb{R}$;
(3) Asteroide: $x(t) = a\cos^3 t$, $y(t) = a\sin^3 t$, con $t \in [0, 2\pi]$, ossia $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$;
(4) Evolvente del cerchio: $x(t) = a(\cos t + t\sin t)$, $y(t) = a\sin^3 t$ con $t \in \mathbb{R}$;
(5) Spirale d'Archimede: $r(\vartheta) = a\vartheta$ con $\vartheta \geq 0$;
(6) Spirale iperbolica: $r(\vartheta) = \frac{a}{\vartheta}$ con $\vartheta > 0$;
(7) Spirale logaritmica: $r(\vartheta) = e^{a\vartheta}$ con $\vartheta \in \mathbb{R}$.

Calcolare il vettore tangente e normale nei precedenti esempi. Verificare l'equivalenza tra forma cartesiana e parametrica delle equazioni, se date entrambe. Quando possibile, calcolare la lunghezza della curva ristretta ad un opportuno intervallo limitato.

Osservazione 2.3 (Funzioni a variazione limitata)**.** La *variazione totale* $V(\gamma)$ di una curva $\gamma : [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ è l'estremo superiore delle lunghezze delle poligonali inscritte in γ. Precisamente, data $\Sigma = \{t_i \in [a, b] : t_0 = a < t_1 < ... < t_{N-1} < t_N = b\}$ partizione di $[a, b]$ si consideri la curva poligonale P_Σ che ha i vertici nei punti $p_i = \gamma(t_i) \in \mathbb{R}^n$, $i = 1, ..., N$. La lunghezza della poligonale è

$$L(P_\Sigma) = \sum_{i=0}^{N-1} \|\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i)\|.$$

La variazione totale di γ è per definizione $V(\gamma) = \sup_\Sigma L(P_\Sigma)$, dove l'estremo superiore è calcolato su tutte le partizioni Σ. La curva γ si dice a *variazione limitata* o *rettificabile* se $V(\gamma) < +\infty$. Nel caso $n = 1$ si parla di *funzione a variazione limitata.*

Esercizio 2.4 (*)**.** Dimostrare che ogni funzione $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ a variazione limitata è limitata. Dimostrare inoltre che ogni funzione crescente è a variazione limitata e si ha $V(f) = f(b) - f(a)$.

Esercizio 2.5 (**)**.** Sia $f_i : [a, b] \to \mathbb{R}$, $i \in \mathbb{N}$, una successione di funzioni a variazione limitata che convergono puntualmente in $[a, b]$ ad una funzione f, precisamente sia

$$f(t) = \lim_{i\to+\infty} f_i(t)$$

per ogni $t \in [a, b]$. Dimostrare che la variazione totale è semicontinua inferiormente rispetto alla convergenza puntuale, precisamente mostrare che

$$V(f) \leq \liminf_{i\to+\infty} V(f_i).$$