1. Spazi Metrici I

Si ricordi che uno *spazio metrico* (X, d) è un insieme X dotato di una funzione $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ tale che:

(1) $d(x,y) \geq 0$ e $d(x,y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$ per ogni $x, y \in X$,
(2) $d(x,y) = d(y,x)$ per ogni $x, y \in X$ (simmetria),
(3) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(y,z)$ per ogni $x, y, z \in X$ (disuguaglianza triangolare).

La funzione d è detta *metrica* (o distanza) su X e (1), (2), (3) sono gli assiomi che la definiscono.

Esercizio 1.1. Verificare gli assiomi della distanza nei seguenti esempi.

(1) $X = \mathbb{R}$, $d(x,y) := |x - y|$.
(2) $X = \mathbb{R}^n := \underbrace{\mathbb{R} \times ... \times \mathbb{R}}_{n\,volte}$, $d(x,y) := \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^2}$, la distanza Euclidea su $\mathbb{R}^n$.
(3) $X = \mathbb{N}$, $d(n,m) := \left|\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{m}\right|$.
(4) $X = \mathbf{C}([0,1])$, $d(f,g) := \max\limits_{t \in [0,1]} |f(t) - g(t)|$, cioè X è lo spazio delle funzioni continue sull'intervallo $[0,1] \subset \mathbb{R}$ con la metrica della *convergenza uniforme*.

Esercizio 1.2. Quali tra le seguenti funzioni $d : X \times X \to [0, +\infty)$ sono metriche su $\mathbb{R}$?

(1) $d(x,y) := \begin{cases} x^3 - y^3 & \text{se } x \geq y \\ y - x & \text{se } x \geq y \end{cases}$.
(2) $d(x,y) := |x - y| + |x^3 - y^3|$.
(3) $d(x,y) := x^2 + y^2 + xy$.
(4) $d(x,y) := \dfrac{|x-y|}{1 + |x-y|}$.

Esercizio 1.3. Sia $\mathbb{R}^* := \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ e definiamo una funzione su $\mathbb{R}^*$ come segue:

$$d(x,y) := |\arctan x - \arctan y| \qquad \text{per ogni } x, y \in \mathbb{R},$$

ed inoltre

$$\begin{cases} d(x,+\infty) = d(+\infty,x) = \frac{\pi}{2} - \arctan x, \\ d(x,-\infty) = d(-\infty,x) = \frac{\pi}{2} + \arctan x, \\ \quad d(+\infty,+\infty) = d(-\infty,-\infty) = 0, \\ \quad d(+\infty,-\infty) = d(-\infty,+\infty) = \pi. \end{cases}$$

Verificare che la funzione d è una distanza su $\mathbb{R}^*$. Quale è il diametro[1] di $\mathbb{R}^*$ con questa distanza?

Esercizio 1.4 (*)**.** Per la funzione $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \longrightarrow \mathbb{R}$ sotto definita, rispondere ai seguenti quesiti.

(1) Verificare che $f(x,y) := \frac{x^2}{x^2+y^2}$ non può essere prolungata con continuità in $(0,0)$.

[1] Il *diametro* di uno spazio metrico (X,d) è definito come $\operatorname{diam} X := \sup_{x,y \in X} d(x,y)$.

(2) Verificare che $f(x,y) := \frac{(y^2-x)^2}{x^2+y^4}$ non può essere prolungata con continuità in $(0,0)$.
(3) Verificare che $f(x,y) := \frac{x^4+y^4}{x^2+y^2}$ può essere prolungata per continuità in $(0,0)$.
(4) Per la funzione $f(x,y) := \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$ calcolare il limite $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

Esercizio 1.5. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ sia $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ la funzione

$$f_n(t) := \begin{cases} nt & \text{se } 0 \le t \le \frac{1}{n} \\ 2 - nt & \text{se } \frac{1}{n} < t < \frac{2}{n} \\ 0 & \text{se } \frac{2}{n} \le t \le 1. \end{cases}$$

Verificare che ciascuna funzione f_n è continua su $[0,1]$ e provare che successione $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge *puntualmente*. Precisamente, verificare che esiste $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ tale che

$$f(t) = \lim_{n\to+\infty} f_n(t) \qquad \text{per ogni } t \in [0,1].$$

Dire se la successione $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge ad f nella *metrica della convergenza uniforme*; cfr. (4) dell'Esercizio 1.1.

Esercizio 1.6 (**)**.** Sia $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \longrightarrow \mathbb{R}$ la funzione così definita:

$$f(x,y) := \frac{xy}{x^2+y^2}$$

per ogni $(x,y) \ne (0,0)$. Usando la definizione, verificare che

$$\lim_{(x,y)\to(1,1)} f(x,y) = \frac{1}{2} = f(1,1),$$

ovvero che f è continua in $(1,1)$. Dimostrare inoltre che f non può essere prolungata con continuità in $(0,0)$, cioè che non esiste $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$. Verificare infine che f è limitata nel suo dominio di esistenza.

Esercizio 1.7 (***)**.** Siano $p, q \in \mathbb{R}$ tali che $p > 1$ e $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Seguendo lo schema suggerito dimostrare la seguente disuguaglianza:

$$\sum_{i=1}^n x_i y_i \le \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n |y_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

(1) Assumendo la validità della disuguaglianza seguente: *Per ogni $u, v \ge 0$ vale*

$$uv \le \frac{u^p}{p} + \frac{v^q}{q}, \qquad (*)$$

porre $u^p = \frac{|x_i|^p}{\sum_{i=1}^n |x_i|^p}$ e $v^q = ...$ e dedurre la tesi.
(2) Provare la disuguaglianza $(*)$ partendo dalla concavità della funzione $g(x) = x^{\frac{1}{p}}$, $x \ge 0$. Essendo g concava, si ha $g(x) \le g(1) + g(1)(x-1)$ per ogni $x \ge 0$. Dedurre la disuguaglianza ponendo $x = \frac{u^p}{v^q}$.

Infine, provare che $\|x\|_p := (\sum_{i=1}^n |x_i|^p)^{\frac{1}{p}}$ definisce una norma su $\mathbb{R}^n$ e disegnare le palle unitarie (ovvero di raggio 1) in tale norma.