1. Esercizi vari: Contrazioni, Continuità, Topologia in SM

Esercizio 1.1. Determinare il più grande sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$ su cui è definita ciascuna delle seguenti funzioni:
(1) $f(x,y) = \sqrt{xy + \log x}$;
(2) $f(x,y) = \sqrt{xe^y - ye^x}$;
(3) $f(x,y) = \sqrt{xy(xy-1)}$.

Esercizio 1.2. Studiare la convergenza puntuale e uniforme su opportuni sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ della successione di funzioni $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ così definita

$$f_n(x) := \frac{1+x^n}{n+x^{2n}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Esercizio 1.3. Usando la definizione, verificare la continuità nei punti specificati delle funzioni sotto definite:
(1) $f(x,y) = \dfrac{x}{y}$ in $(0,1)$, Risposta: $\delta \le \min\left\{\frac{1}{2}, \frac{\epsilon}{2}\right\}$;
(2) $f(x,y) = \dfrac{x+y}{x-y}$ in $(0,1)$, Risposta: $\delta \le \min\left\{\frac{1}{4}, \frac{\epsilon}{4}\right\}$.

Esercizio 1.4. Verificare le affermazioni proposte:.
(1) Sia $a > 0$. La funzione $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(t) := e^{-t}$, è una contrazione.
(2) Sia $F : \mathbf{C}([0,1]) \longrightarrow \mathbf{C}([0,1])$ la funzione

$$F(f)(s) := \int_0^1 k(s,t) f(t)\, dt$$

dove $k : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ è una funzione continua. F si chiama *operatore integrale* e k si dice *nucleo* di F. Verificare che F è una contrazione se si ha $\|k\|_\infty \le r < 1$, dove si è posto

$$\|k\|_\infty := \max_{(s,t)\in[0,1]\times[0,1]} |k(s,t)|.$$

(3) Siano $\phi, \gamma \in \mathbf{C}([0,1])$ e sia $F : \mathbf{C}([0,1]) \longrightarrow \mathbf{C}([0,1])$ la funzione

$$F(f)(t) := \gamma(t) + f(t)\phi(t).$$

Dimostrare che F è una contrazione se e solo se $\|\phi\|_\infty < 1$. Lo spazio $\mathbf{C}([0,1])$ è munito della metrica della convergenza uniforme $\|f\|_\infty := \max_{t\in[0,1]} |f(t)|$. Trovare il punto fisso di F.
(4) (*) Ogni funzione continua $f : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ ha almeno un punto fisso.
(5) (**) Se $a > 0$, la funzione $F : \mathbf{C}([0,1]) \longrightarrow \mathbf{C}([0,1])$

$$F(f)(x) := e^{-ax} \int_0^x e^{at} f(t)\, dt$$

è una contrazione.

Esercizio 1.5. Determinare interno, frontiera e chiusura dei seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}^2$. Dire se sono aperti, chiusi (o né aperti né chiusi). Dire se sono compatti e/o se hanno chiusura compatta:

(1) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$;
(2) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 > 1\}$;
(3) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \neq 1,\ y \geq x^2\}$;
(4) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| < 1\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = 1\}$.

Esercizio 1.6. Sia $A = \left\{\frac{n}{1+n},\ n \in \mathbb{N}\right\} \subset \mathbb{R}$ con la distanza Euclidea. Descrivere gli insiemi A° e $\overline{A}$.

Esercizio 1.7 (*). Sia (X,d) uno spazio metrico e sia $K \subset X$ un sottoinsieme chiuso. Provare che:

(1) Se X è compatto allora anche K è compatto.
(2) Se X è completo allora anche K è completo con la distanza ereditata da X.

Esercizio 1.8 (**). Sia (X,d) uno spazio metrico. Per $x_0 \in X$ ed $r > 0$ definiamo

$$B_r(x_0) = \left\{x \in X : d(x,x_0) < r\right\},$$
$$K_r(x_0) = \left\{x \in X : d(x,x_0) \leq r\right\},$$
$$S_r(x_0) = \left\{x \in X : d(x,x_0) = r\right\}.$$

Provare che $\partial B_r(x_0) \subset S_r(x_0)$ e che $\overline{B_r(x_0)} \subset K_r(x_0)$. Mostrare tramite esempi che le inclusioni possono essere strette.

Alcune soluzioni di esercizi del Foglio 3.

Esercizio 1.9. Dimostrare che $d(x,y) := \frac{|x-y|}{1+|x-y|}$ è una metrica su $\mathbb{R}$.

Soluzione. **Primo modo**. Usare la crescenza della funzione $g(t) = \frac{t}{1+t}$ per ogni $t > 0$. Allora segue che

$$d(x,y) = \frac{|x-y|}{1+|x-y|} \leq \frac{|x-z|+|y-z|}{1+|x-z|+|y-z|} \leq d(x,z) + d(y,z)$$

per ogni $x, y, z \in \mathbb{R}$.

Secondo modo. Se la disuguaglianza triangolare si assume vera, si dovrebbe avere

$$\frac{|x-y|}{1+|x-y|} \leq \frac{|x-z|}{1+|x-z|} + \frac{|y-z|}{1+|y-z|}.$$

Per semplicità, porre $|x-y| = d_{xy}$ per ogni $x, y \in \mathbb{R}$. Segue la seguente catena di equivalenze:

$$\begin{array}{ccc}
\dfrac{d_{xy}}{1+d_{xy}} & \leq & \dfrac{d_{xz}}{1+d_{xz}} + \dfrac{d_{yz}}{1+d_{yz}} \\
 & \Longleftrightarrow & \\
\dfrac{d_{xy}}{1+d_{xy}} & \leq & \dfrac{d_{xz}+d_{yz}+2d_{xz}d_{yz}}{(1+d_{xz})(1+d_{yz})} \\
 & \Longleftrightarrow & \\
d_{xy}(1+d_{xz})(1+d_{yz}) & \leq & (d_{xz}+d_{yz}+2d_{xz}d_{yz})(1+d_{xy}).
\end{array}$$

Esemplificando l'ultima disuguaglianza, si ottiene:

$$d_{xy} \leq d_{xz} + d_{yz} + 2d_{xz}d_{yz} + d_{xy}d_{xz}d_{yz}$$

che è sempre vera. Infatti, usando la disuguaglianza triangolare per $d_{xy} = |x-y|$, si ha

$$d_{xy} \leq d_{xz} + d_{yz}.$$

La disuguaglianza precedente è dunque vera a più forte ragione, visto che a secondo membro compaiono quantità positive. La tesi segue facilmente.

□

Esercizio 1.10. Verificare che

$$\lim_{(x,y)\to(1,1)} f(x,y) = \frac{1}{2} = f(1,1),$$

ossia la continuità di f in $(1,1)$.

Soluzione. Data $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$ si deve verificare che $\lim_{t\to(1,1)} f(x,y) = \frac{1}{2}$, cioè

$$\forall \epsilon > 0\ \exists \delta_\epsilon > 0 \quad \text{tale che} \quad \left(\|(x,y)-(1,1)\| \leq \delta_\epsilon \Rightarrow \left| \frac{xy}{x^2+y^2} - \frac{1}{2} \right| \leq \epsilon \right).$$

Si ha infatti

$$\left| \frac{xy}{x^2+y^2} - \frac{1}{2} \right| = \frac{|x-y|^2}{2(x^2+y^2)}$$

e $|x-y| \leq |x-1| + |y-1| \leq \sqrt{2}\|(x,y)-(1,1)\|$. Se $\|(x,y)-(1,1)\| < \delta < 1$, segue che

$$\left| \frac{xy}{x^2+y^2} - \frac{1}{2} \right| \leq \frac{\delta^2}{2(\sqrt{2}-\delta)^2} < \frac{\delta^2}{2(\sqrt{2}-1)^2}.$$

Ponendo quest' ultima quantità minore di ϵ, la tesi segue con

$$\delta < \{1, \sqrt{2\epsilon}(\sqrt{2}-1)\}.$$

□