1. Funzioni di più variabili I

Esercizio 1.1. 1) Scrivere l'equazione del piano tangente al paraboloide $f(x,y) = x^2 + y^2$ in un generico punto $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Fare lo stesso con l'iperboloide di rotazione $f(x,y) = \sqrt{1 + x^2 + y^2}$, con $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Disegnare infine i grafici in $\mathbb{R}^3$ delle funzioni date.

2) Si consideri l'ellissoide $\big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 2x^2 + 4y^2 + z^2 = 1\big\}$. Calcolare il piano tangente all'ellissoide in un suo generico punto esprimendo una sua porzione come grafico di funzione.

Esercizio 1.2. Siano $A = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x \neq 0\big\}$ ed $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x,y,z) = x^5 \sin\left(\frac{y^2 + z^2}{x^2}\right).$$

i) Stabilire se esiste $k \in \mathbb{R}$ tale che f verifica l'equazione alle derivate parziali $x f_x + y f_y + z f_z = k f$ in tutti i punti di A.
ii) Stabilire se f può essere estesa con continuità su tutto $\mathbb{R}^3$.
iii) Stabilire se f può essere estesa su tutto $\mathbb{R}^3$ ad una funzione $C^1(\mathbb{R}^3)$.

Esercizio 1.3. Sia $f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ la funzione

$$f(x) = \frac{1}{|x|}, \quad |x| \neq 0,$$

dove $|x| = (x_1^2 + ... + x_n^2)^{1/2}$. Calcolare in un generico punto $x \neq 0$ la derivata direzionale di f lungo il *versore* $v = \frac{\nabla f(x)}{|\nabla f(x)|}$.

Esercizio 1.4. Siano $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 9y^2 < 9\}$ ed $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2 + 9y^2 & (x,y) \in E \\ 9 & (x,y) \notin E. \end{cases}$$

Quali delle seguenti affermazioni sono vere e quali false?
(A) f_x è continua in $(0,1)$ e f_y lo è in $(3,0)$.
(B) f_x ed f_y esistono in tutti i punti dell'ellisse $\partial E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 9y^2 = 9\}$. [Incidentalmente, dimostrare che ∂E è la frontiera di E.]
(C) f è differenziabile in $(0,1)$ e $(3,0)$.
[Risposta: (A) è vera; (B) e (C) sono false].

Esercizio 1.5 (*)**.** Per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ sia $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ la funzione sotto definita. In ciascun caso, determinare α in modo che f sia differenziabile in ogni punto di $\mathbb{R}^2$:

(1) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{e^{x^2+2y^2}-1}{(2x^2+y^2)^\alpha} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$;

[Risposta: $\alpha < \frac{1}{2}$]

(2) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{\arctan(x^2+y^2)}{(x^4+y^4)^\alpha} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$;

[Risposta: $\alpha < \frac{1}{4}$]

(3) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{|x|^2+|y|^{2\alpha}}{(\log(1+(x^2+y^2)))^{\frac{1}{4}}} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$; si assuma $\alpha > 0$.

[Risposta: $\alpha > \frac{3}{4}$].

Esercizio 1.6 (**)**.**

(1) Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la seguente funzione:

$$f(x,y) = \begin{cases} xy \sin\left(\frac{1}{xy}\right) & xy \neq 0, \\ 0 & xy = 0. \end{cases}$$

Provare che f è continua in $\mathbb{R}^2$ ma non è derivabile nel punto $(1,0)$.

(2) Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la seguente funzione:

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2y^2 \sin\left(\frac{1}{xy}\right) & xy \neq 0, \\ 0 & xy = 0. \end{cases}$$

Provare che f è differenziabile in ogni punto di $\mathbb{R}^2$ ma non è di classe $\mathbf{C}^1(\mathbb{R}^2)$.

Esercizio 1.7. Sia $f(x,y) = \log(\exp(x)+\exp(y))$, con $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Calcolare l'espressione

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2.$$

Alcune soluzioni di esercizi del Foglio 4.

Soluzione Esercizio 1.1.(2) . Per determinare il dominio di f, si dovrà evidentemente risolvere la disuguaglianza

$$xe^y - ye^x \geq 0 \tag{1}$$

per $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Conviene ora studiare la funzione di una variabile reale $g(t) = \frac{t}{e^t}$. Il motivo è che dividendo ambo i membri della disuguaglianza per la funzione (sempre $\neq 0$) e^{x+y} si ottiene la disuguaglianza equivalente

$$\frac{x}{e^x} \geq \frac{y}{e^y}.$$

La derivata di g vale $g'(t) = \frac{1-t}{e^t}$. Perciò g è crescente a sinistra di 1 (cioè in $]-\infty, 1[$), decrescente a destra di 1 (cioè in $]1, +\infty[$) e $g'(1) = 0$. Inoltre $g(t) \longrightarrow 0$ se $t \to +\infty$. Notare infine che $t = 1$ è un massimo assoluto (e $g(t) = \frac{1}{e}$) e che se $t > 0$ il grafico di g,

$$\operatorname{graf}(g) = \{(t, y) \in \mathbb{R}^2 : y = g(t)\},$$

intercetta la retta $y = a$ in esattamente due punti per ogni $a \in \left]0, \frac{1}{e}\right[$. Siano essi t e $\overline{t}$. Si osservi che ciò equivale a dire che se $t > 0$, $\overline{t}$ è definito dalla relazione $\overline{t}e^{\overline{t}} = te^t$, che è soddisfatta da un solo $\overline{t} \neq t$, $\overline{t} > 0$.

Perciò, se $y \leq 0$ la disuguaglianza (1) vale se $x \geq y$. Se $y > 0$, dividiamo due casi. Se $0 < y \leq 1$, la disuguaglianza vale se $y \leq x \leq \overline{y}$. Infine, se $y > 1$ si deve avere $\overline{y} \leq x \leq y$. □

Soluzione Esercizio 1.3.(2). Si tratta di verificare che

$$\lim_{(x,y)\to(0,1)} f(x, y) = -1 = f(0, 1),$$

ossia la continuità di f in $(0, 1)$. Data $f(x, y) = \frac{x+y}{x-y}$, si deve pertanto mostrare che

$$\forall \epsilon > 0\ \exists \delta_\epsilon > 0 \quad \text{tale che} \quad \left(\|(x, y) - (0, 1)\| \leq \delta_\epsilon \Rightarrow \left| \frac{x + y}{x - y} + 1 \right| \leq \epsilon \right).$$

Si ha

$$\left| \frac{x + y}{x - y} + 1 \right| = \left| \frac{2x}{x - y} \right|.$$

Scegliamo δ in modo che la palla $B((0, 1), \delta)$ centrata in $(0, 1)$ non intersechi la bisettrice del primo e terzo quadrante di $\mathbb{R}^2$. Ad esempio, porre $\delta < \frac{1}{4}$. Se $(x, y) \in B((0, 1), \delta)$ allora, in particolare, si ha $|x| < \delta$, $|y - 1| < \delta$ e $y > x$. Ne segue che per tali (x, y) vale

$$|x - y| > 1 - 2\delta > \frac{1}{2},$$

e quindi

$$\left| \frac{2x}{x - y} \right| < \frac{2\delta}{1 - 2\delta} < 4\delta.$$

Ponendo quest' ultima quantità minore di ϵ, la tesi segue con $\delta < \min\left\{\frac{1}{4}, \frac{\epsilon}{4}\right\}$. □