

1. PROVA DI AUTOVALUTAZIONE

Esercizio 1.1. [8 pti]

- (1) [6 pti] Determinare tutti gli $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ per i quali converge il seguente integrale generalizzato

$$I_{\alpha, \beta} := \int_0^{+\infty} \frac{|x-1|^\alpha \arctan(x)}{x^\beta (1+x^2)} dx.$$

- (2) [2 pti] Calcolare esplicitamente l'integrale nel caso $\alpha = \beta = 0$.

Esercizio 1.2. [8 pti] Siano $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ed $y \in C^\infty(\mathbb{R})$ la soluzione del seguente problema di Cauchy

$$y'' - 4y' + 4y = e^t, \quad y(0) = \alpha, \quad y'(0) = \beta.$$

- (1) [6 pti] Calcolare la soluzione del problema di Cauchy.
 (2) [1 pti] Determinare tutti gli $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ per cui vale

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{y(t)}{te^{2t}} = 1.$$

- (3) [1 pti] Determinare, se esistono, tutti gli $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tali che

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{y(t)}{e^{2t}} = 1.$$

Esercizio 1.3.

- i) [2 pti] Calcolare il seguente integrale improprio:

$$\int_0^{1/2} \frac{1}{\vartheta (\log \vartheta)^2} d\vartheta.$$

- ii) [6 pti] Sia $\gamma : [0, 1/2] \rightarrow \mathbb{R}^2$ la curva data dall'equazione polare

$$\varrho = \begin{cases} -\frac{1}{\log \vartheta} & \vartheta \in (0, 1/2], \\ 0 & \vartheta = 0, \end{cases}$$

ovvero $\gamma(\vartheta) = (\varrho(\vartheta) \cos \vartheta, \varrho(\vartheta) \sin \vartheta)$. Verificare che γ è rettificabile.

Esercizio 1.4. [8 pti] Sia $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la seguente funzione:

$$d(x, y) = \log(1 + |x - y|), \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

Provare che (\mathbb{R}, d) è uno spazio metrico.

Tempo a disposizione: 2 ore e 30 minuti.