Analisi 2 – 2011   Foglio 6

1. Prova di autovalutazione

Esercizio 1.1. [8 pti]

(1) [6 pti] Determinare tutti gli $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ per i quali converge il seguente integrale generalizzato

$$I_{\alpha,\beta} := \int_0^{+\infty} \frac{|x-1|^\alpha \arctan(x)}{x^\beta (1+x^2)} \, dx.$$

(2) [2 pti] Calcolare esplicitamente l'integrale nel caso $\alpha = \beta = 0$.

Esercizio 1.2. [8 pti] Siano $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ed $y \in \mathbf{C}^\infty(\mathbb{R})$ la soluzione del seguente problema di Cauchy

$$y'' - 4y' + 4y = e^t, \quad y(0) = \alpha, \ y'(0) = \beta.$$

(1) [6 pti] Calcolare la soluzione del problema di Cauchy.

(2) [1 pti] Determinare tutti gli $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ per cui vale

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{y(t)}{te^{2t}} = 1.$$

(3) [1 pti] Determinare, se esistono, tutti gli $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tali che

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{y(t)}{e^{2t}} = 1.$$

Esercizio 1.3.

i) [2 pti] Calcolare il seguente integrale improprio:

$$\int_0^{1/2} \frac{1}{\vartheta (\log \vartheta)^2} d\vartheta.$$

ii) [6 pti] Sia $\gamma : [0, 1/2] \to \mathbb{R}^2$ la curva data dall'equazione polare

$$\varrho = \begin{cases} -\dfrac{1}{\log \vartheta} & \vartheta \in (0, 1/2], \\ 0 & \vartheta = 0, \end{cases}$$

ovvero $\gamma(\vartheta) = \big(\varrho(\vartheta) \cos \vartheta, \varrho(\vartheta) \sin \vartheta\big)$. Verificare che γ è rettificabile.

Esercizio 1.4. [8 pti] Sia $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la seguente funzione:

$$d(x, y) = \log(1 + |x - y|), \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

Provare che $(\mathbb{R}, d)$ è uno spazio metrico.

Tempo a disposizione: 2 ore e 30 minuti.

Esercizio 1. [8 pti]

(1) [6 pti] Determinare tutti gli $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ per i quali converge il seguente integrale generalizzato
$$I_{\alpha,\beta} := \int_0^{+\infty} \frac{|x-1|^\alpha \arctan(x)}{x^\beta (1+x^2)}\, dx.$$

(2) [2 pti] Calcolare esplicitamente l'integrale nel caso $\alpha = \beta = 0$.

Soluzione. (1) Occorre controllare la convergenza dell'integrale vicino $x = 0$ (se $\beta > 0$), vicino $x = 1$ (quando $\alpha < 0$) e quando $x \to \infty$. Per semplicità poniamo
$$f(x) := \frac{|x-1|^\alpha \arctan(x)}{x^\beta (1+x^2)}.$$
Usiamo il Criterio del confronto asintotico. Una funzione di confronto per $x \to 0^+$ è $g(x) = 1/x^{\beta-1}$, che verifica:
$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1 \neq 0.$$
Siccome
$$\int_0^{1/2} \frac{1}{x^{\beta-1}} dx < \infty \quad \Leftrightarrow \quad \beta - 1 < 1,$$
allora
$$\int_0^{1/2} f(x) dx \quad \text{converge se e solo se } \beta < 2.$$

Una funzione di confronto per $x \to 1$ è ovviamente $h(x) = |x-1|^\alpha$, che verifica $f(x)/h(x) \to \pi/8 \neq 0$ per $x \to 1$. D'altra parte
$$\int_{-1/2}^{3/2} f(x) dx \quad \text{converge se e solo se converge} \quad \int_{-1/2}^{3/2} |x-1|^\alpha dx,$$
e l'ultimo integrale converge se e solo se $\alpha > -1$.

Infine, una funzione di confronto per $x \to \infty$ è $k(x) = 1/x^{2+\beta-\alpha}$, che verifica $f(x)/h(x) \to \pi/2$ per $x \to \infty$. Poichè
$$\int_{3/2}^{\infty} \frac{1}{x^{2+\beta-\alpha}} dx < \infty \quad \Leftrightarrow \quad 2 + \beta - \alpha > 1,$$
l'integrale su $(3/2, \infty)$ converge se e solo se $\alpha < \beta + 1$.

La conclusione è che l'integrale generalizzato di f su $(0, +\infty)$ converge se e solo se $-1 < \alpha < 1 + \beta$ e $\beta < 2$.

(2) Nel caso $\alpha = \beta = 0$ si ottiene
$$I := \int_0^{+\infty} \frac{\arctan(x)}{1+x^2}\, dx$$
che si calcola mediante la sostituzione $t = \arctan(x)$:
$$I = \lim_{\epsilon\to 0+} \int_\epsilon^{\frac{1}{\epsilon}} \frac{\arctan(x)}{1+x^2}\, dx = \lim_{\epsilon\to 0+} \left(\left[\frac{(\arctan(x))^2}{2} \right]_\epsilon^{\frac{1}{\epsilon}} \right) = \frac{\pi^2}{8}.$$

Esercizio 2. [8 pti] Siano $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ed $y \in \mathbf{C}^\infty(\mathbb{R})$ la soluzione del seguente problema di Cauchy

$$y'' - 4y' + 4y = e^t, \quad y(0) = \alpha, \; y'(0) = \beta.$$

(1) [6 pti] Calcolare la soluzione y del problema di Cauchy.
(2) [1 pti] Determinare tutti gli $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ per cui vale

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{y(t)}{te^{2t}} = 1.$$

(3) [1 pti] Determinare, se esistono, tutti gli $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tali che

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{y(t)}{e^{2t}} = 1.$$

Soluzione. (1) L'equazione caratteristica dell'equazione omogenea associata è $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$ che ha come unica soluzione $\lambda = 2$ di molteplicità 2. Pertanto la soluzione dell'equazione omogenea associata è $y = C_1 e^{2t} + C_2 te^{2t}$, dove C_1, C_2 sono costanti arbitrarie. Calcoliamo l'integrale generale dell'equazione non omogenea con il metodo della variazione delle costanti. Dopo alcuni conti si arriva al sistema

$$\begin{cases} \dot{C}_1 e^{2t} + \dot{C}_2 te^{2t} = 0 \\ \dot{C}_1(2e^{2t}) + \dot{C}_2(1+2t)e^{2t} = e^t, \end{cases}$$

ossia

$$\begin{cases} \dot{C}_1 + \dot{C}_2 t = 0 \\ \dot{C}_1 2 + \dot{C}_2(1+2t) = e^{-t}. \end{cases}$$

Le soluzioni del sistema sono

$$\begin{cases} \dot{C}_1 = te^{-t} \\ \dot{C}_2 = e^{-t}, \end{cases}$$

e integrando si trovano le soluzioni

$$C_1 = c_1 - (1+t)e^{-t} \qquad C_2 = c_2 - e^{-t},$$

dove $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ sono costanti arbitrarie. La soluzione generale dell'equazione non omogenea è dunque:

$$y = \left(c_1 - (1+t)e^{-t}\right) e^{2t} + \left(c_2 - e^{-t}\right) te^{2t}.$$

Le costanti c_1, c_2 si determinano tramite le condizioni iniziali. Si trova

$$c_1 = \alpha - 1, \qquad c_2 = \beta - 2\alpha + 1.$$

Pertanto la soluzione del problema di Cauchy è $y = (\alpha - 1)e^{2t} + (\beta - 2\alpha + 1)te^{2t} + e^t$.

(2) Osserviamo che

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{y(t)}{te^{2t}} = 1$$

se e solo se $\beta = 2\alpha$.

(3) Infine si ha

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{y(t)}{e^{2t}} = 1$$

se e solo se $c_1 = \alpha - 1 = 1$ e $c_2 = \beta - 2\alpha + 1 = 0$, ovvero $\alpha = 2$ e $\beta = 3$.

Esercizio 3.

i) [2 pti] Calcolare il seguente integrale improprio:

$$\int_0^{1/2} \frac{1}{\vartheta(\log\vartheta)^2} d\vartheta.$$

ii) [6 pti] Sia $\gamma : [0, 1/2] \to \mathbb{R}^2$ la curva data dall'equazione polare

$$\varrho = \begin{cases} -\dfrac{1}{\log\vartheta} & \vartheta \in (0, 1/2], \\ 0 & \vartheta = 0, \end{cases}$$

ovvero $\gamma(\vartheta) = \big(\varrho(\vartheta)\cos\vartheta, \varrho(\vartheta)\sin\vartheta\big)$. Verificare che γ è rettificabile.

Soluzione. i) L'integrale si può calcolare con la sostituzione $s = \log(\vartheta)$:

$$\int_0^{1/2} \frac{1}{\vartheta(\log\vartheta)^2} d\vartheta = \int_{-\infty}^{\log(1/2)} \frac{1}{s^2} ds = \lim_{M\to-\infty} \int_M^{\log(1/2)} \frac{1}{s^2} ds$$
$$= \lim_{M\to-\infty} \Big[-\frac{1}{s} \Big]_{s=M}^{\log(1/2)} = -\frac{1}{\log(1/2)}.$$

ii) Ricordiamo che la lunghezza di una curva γ data in coordinate polari dall'equazione $\varrho = \varrho(\vartheta)$ è

$$L(\gamma) = \int_0^{1/2} \sqrt{\varrho^2 + \dot{\varrho}^2} d\vartheta.$$

Nel caso in esame si ha

$$L(\gamma) = \int_0^{1/2} \sqrt{\frac{1}{\log^2\vartheta} + \frac{1}{\vartheta^2\log^4\vartheta}} d\vartheta$$
$$= \int_0^{1/2} \frac{1}{\vartheta\log^2\vartheta} \sqrt{1 + \vartheta^2\log^2\vartheta} d\vartheta.$$

Si tratta di un integrale improprio di funzione non limitata. La curva γ è rettifiabile se e solo se l'integrale improprio converge.

Per studiare la convergenza osserviamo che

$$\lim_{\vartheta\to0^+} \vartheta^2\log^2\vartheta = 0.$$

Questo fatto è noto e può essere verificato ad esempio con il Teorema di Hospital. Dunque, utilizzando il criterio del confronto asintotico, lo studio della rettificabilità di γ si riduce a studiare la convergenza dell'integrale

$$\int_0^{1/2} \frac{1}{\vartheta\log^2\vartheta} d\vartheta$$

che, come visto al punto i), converge. Dunque γ è rettificabile.

Esercizio 4. Sia $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la seguente funzione:

$$d(x, y) = \log(1 + |x - y|), \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

Provare che $(\mathbb{R}, d)$ è uno spazio metrico.

Soluzione. Verifichiamo gli assiomi della funzione distanza.
(A1) Chiaramente $\log(1 + |x - y|) \geq \log 1 = 0$ per ogni $x, y \in \mathbb{R}$ e inoltre si ha

$$\log(1 + |x - y|) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 1 + |x - y| = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x = y.$$

(A2) La funzione è simmetrica $\log(1 + |x - y|) = \log(1 + |y - x|)$.

(A3) Per verificare la disuguaglianza triangolare osserviamo preliminarmente che se $s, t \geq 0$ sono numeri reali non negativi, allora vale

$$1 + s + t \leq 1 + s + t + st = (1 + s)(1 + t)$$

e dunque dalle proprietà della funzione logaritmo segue che

$$\log(1 + s + t) \leq \log\big((1 + s)(1 + t)\big) = \log(1 + s) + \log(1 + t).$$

Utilizzando la disuguaglianza precedente si ottiene, per ogni $x, y, z \in \mathbb{R}$:

$$\log(1 + |x - y|) \leq \log(1 + |x - z| + |z - y|) \leq \log(1 + |x - z|) + \log(1 + |z - y|).$$