1. Massimi e minimi vincolati. Moltiplicatori di Lagrange

Esercizio 1.1. Per $\alpha > 1$ sia $K \subset \mathbb{R}^2$ il triangolo chiuso di vertici $(0,0), (\alpha{+}1,0), (0,\alpha{+}1)$ e sia $f : K \to \mathbb{R}$ la funzione

$$f(x,y) := x^\alpha + y^\alpha + (2+\alpha-x-y)^\alpha.$$

Calcolare l'immagine $f(K) \subset \mathbb{R}$.

Esercizio 1.2. Sia $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 4x^2 + y^2 \leq 4\}$. Calcolare il valore massimo della funzione $f(x,y) := x^2y^2$ su K.

Esercizio 1.3. Sia

$$f(x,y,z) := y^2 - 3|x|$$

definita sull'insieme $K = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + 9z^2 \leq 9\}$. Studiare qualitativamente f. In particolare, si determini l'immagine $f(K)$.

Esercizio 1.4. Discutere l'esistenza di soluzioni $x, y, z, w \in \mathbb{R}$ in un intorno di $0 \in \mathbb{R}^4$ del sistema non lineare di equazioni

$$\begin{cases} \mathrm{e}^{x+w} + xy + zw\mathrm{e}^{y+z} = 1 \\ y + \sin(xyz) + \cos(xzw) = 1. \end{cases}$$

Esercizio 1.5. Usando il Teorema sui moltiplicatori di Lagrange provare la seguente disuguaglianza fra la media geometrica e quella aritmetica

$$\sqrt[n]{x_1 \cdot \ldots \cdot x_n} \leq \frac{x_1 + \ldots + x_n}{n},$$

con $x_1, ..., x_n \geq 0$ ed $n \in \mathbb{N}$.