ARGOMENTI DI ANALISI DUE –A.A. 2012–13

GIUSEPPE DE MARCO

1. Curve

Per lo studio delle funzioni a valori vettoriali di una variabile reale, collettivamente e vagamente denominate curve, seguo il mio libro Analisi Due, abbreviato in AnDue, ed Decibel Zanichelli 1999, e le presenti dispense, che sostituiscono alcune parti del libro, come indicheremo via via, ed aggiungono esercizi e commenti. Si comincia con AnDue, capitolo 3, 3.1

1.1. **Aggiunte a 3.1.** Data una funzione vettoriale $f : I \to Y$, dove I è intervallo di $\mathbb{R}$, Y è spazio euclideo, ed il parametro t è pensato come il tempo, il vettore derivato $f'(t)$, quando esiste, è (per definizione) la *velocità vettoriale* del punto mobile $f(t)$ (pensato come estremo del vettore $f(t)$ applicato nell'origine) all'istante t, ed il modulo $|f'(t)|$ della velocità è la velocità scalare. Spesso in Meccanica si scrive $\dot{f}(t)$ (leggi f punto di t) invece di $f'(t)$. La derivata seconda $f''(t)$, quando esiste, è l'*accelerazione vettoriale* di f all'istante t, ed è talvolta denotata $\ddot{f}(t)$. Il moto di un punto viene descritto, nello spazio tridimensionale euclideo $Y \approx \mathbb{R}^3$ da una funzione vettoriale $t \mapsto x(t)$, dove t varia nell'intervallo I di $\mathbb{R}$.

1.2. **Il teorema del valor medio per funzioni a valori vettoriali.** (*sostituisce 3.2*) Ricordiamo il teorema del valor medio, o di Lagrange, per funzioni reali di una variabile reale: se $[a, b]$ è intervallo compatto di $\mathbb{R}$, ed $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ è continua in $[a, b]$ e derivabile in $]a, b[$, allora esiste $\xi \in]a, b[$ tale che si abbia

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)\,(b - a).$$

Questo teorema non si estende come uguaglianza per funzioni vettoriali di una variabile. Sia ad esempio $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ la funzione "avvolgente" $f(t) = (\cos t, \sin t)$; si ha $f'(t) = (-\sin t, \cos t)$ e quindi $|f'(t)| = 1$ costantemente, per cui $f'(t)$ non è mai nullo, e pertanto non esiste alcun $\xi \in \mathbb{R}$ tale che sia $f(2\pi) - f(0) = (0, 0) = f'(\xi)\,2\pi$.

Parlando alla buona: il tentativo ingenuo di estendere il teorema scalare a quello vettoriale usando le componenti fallisce perchè in generale gli ξ delle singole componenti sono diversi: ad esempio per cos in $[a, b] = [0, 2\pi]$ lo ξ ammissibile in $]0, 2\pi[$ è unico, ed è π, mentre per sin gli ξ ammissibili sono $\pi/2$ e $3\pi/2$.

Nelle applicazioni tuttavia il teorema del valor medio è usato soprattutto per questa sua conseguenza: $|f(b) - f(a)| = |f'(\xi)|\,(b - a) \le L\,(b - a)$, se $L \ge |f'(x)|$ per ogni $x \in]a, b[$, cioè più come disuguaglianza che come uguaglianza, serve a controllare l'incremento della funzione con i valori della derivata della stessa, ed in questa forma, come vedremo fra poco , si estende alle funzioni a valori vettoriali.

1.2.1.

. Teorema del valor medio per funzioni vettoriali di una variabile reale *Sia X spazio normato, sia $[a, b]$ (con $a < b$) intervallo compatto di $\mathbb{R}$, e sia $f : [a, b] \to X$ continua su $[a, b]$ e derivabile su $]a, b[$. Poniamo $\|f'\|_{[a,b]} = \sup\{\|f'(t)\| : t \in]a, b[\}$. Allora si ha*

$$\|f(b) - f(a)\| \le \|f'\|_{[a,b]}\,(b - a).$$

Se ricordiamo l'interpretazione di $\|f'(t)\|$ come modulo della velocità, il teorema del valor medio asserisce il fatto intuitivamente banale che la strada percorsa nell'intervallo di tempo fra a e b non può superare il massimo della velocità in tale intervallo per il tempo $b - a$ trascorso fra i due istanti a e b. La dimostrazione è fra poco; ma non dimostreremo il teorema in questa generalità, ci limiteremo al caso in cui X sia spazio a prodotto scalare. Prima della dimostrazione osserviamo le due più importanti conseguenze:

Corollario. *Sia I intervallo di $\mathbb{R}$, X spazio normato, e sia $f : I \to X$ funzione. Allora*

1. *f è costante su I se e solo se è derivabile in I con derivata identicamente nulla.*
2. *Se f è derivabile su I, allora f è lipschitziana su I se e solo se la derivata è limitata su I (ed in tal caso la costante di Lipschitz di f è $\|f'\|_I := \sup\{\|f'(t)\| : t \in I\}$).*

Dimostrazione. Si lascia al lettore: in (1) la parte non banale è che se la derivata è ovunque nulla allora f è costante, e per questo serve il precedente teorema. $\square$

Esempio 1. Un moto $x : I \to Y \approx \mathbb{R}^3$ si dice *centrale* se la sua accelerazione è sempre diretta verso un fissato punto, che scegliamo come origine, cioè la retta $\{x(t) + \lambda\, \ddot{x}(t) : \lambda \in \mathbb{R}\}$ passa sempre per l'origine, per ogni istante $t \in I$. Equivalentemente, $x(t)$ e $\ddot{x}(t)$ sono linearmente dipendenti, per ogni $t \in I$, cioè $\ddot{x}(t) \times x(t) = 0$, per ogni $t \in I$. Si ha ora

$$\ddot{x}(t) \times x(t) = \frac{d}{dt}(\dot{x}(t) \times x(t)),$$

come subito si vede derivando il secondo membro ed osservando che $\dot{x}(t) \times \dot{x}(t) = 0$. Ne segue che $\dot{x}(t) \times x(t)$ è un vettore costante, sia esso w. Se $w = 0$, $x(t)$ e $\dot{x}(t)$ sono sempre paralleli, ed il moto si svolge lungo una retta (la retta $\mathbb{R}\, x(t_0)$, se $t_0 \in I$ è tale che $x(t_0) \neq 0$). Se $w \neq 0$, possiamo supporre che sia $w = k\, \vec{\nu}$, dove $k > 0$ è una costante scalare e $\vec{\nu}$ è un versore; in tal caso $x(t)$ e $\dot{x}(t)$ sono sempre ortogonali a $\vec{\nu}$, ed il moto avviene nel piano per l'origine perpendicolare a $\vec{\nu}$.

1.2.2. *Un lemma.* Dimostriamo il teorema del valor medio in una formulazione più generale, che useremo poi, contenuta nel seguente lemma.

Lemma. *Sia X spazio normato, sia $[a, b]$ (con $a < b$) intervallo compatto di $\mathbb{R}$, e siano $f : [a, b] \to X$ e $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue su $[a, b]$ e derivabili su $]a, b[$. Si supponga che sia $\|f'(t)\| \le \varphi'(t)$ per ogni $t \in]a, b[$. Allora si ha*

$$\|f(b) - f(a)\| \le \varphi(b) - \varphi(a).$$

Dimostrazione. (*per X spazio a prodotto scalare*) Si noti che $\varphi'(t) \ge 0$ per ogni $t \in]a, b[$ per cui φ è crescente e quindi $\varphi(b) - \varphi(a) \ge 0$. Quindi, se $f(b) - f(a) = 0$ la dimostrazione è conclusa. Escludendo questo caso, sia u il versore di $f(b) - f(a)$, cioè $u = (f(b) - f(a))/\|f(b) - f(a)\|$. Se supponiamo che la norma di X venga da un prodotto scalare, si ha $\|f(b) - f(a)\| = (f(b) - f(a)) \cdot u$; la funzione scalare $g : [a, b] \to X$ definita da $g(t) = f(t) \cdot u$ è continua su $[a, b]$ e derivabile su $]a, b[$, con derivata $g'(t) = f'(t) \cdot u$; per la disuguaglianza di Cauchy–Schwarz si ha

$$g'(t) = f'(t) \cdot u \le |f'(t) \cdot u| \le \|f'(t)\|\, \|u\| = \|f'(t)\| \le \varphi'(t), \quad \text{quindi} \quad \varphi'(t) - g'(t) \ge 0$$

per ogni $t \in]a, b[$. Ne segue che $u = \varphi - g$ è crescente su $]a, b[$, ed essendo u continua su $[a, b]$ si ha

$$u(b) - u(a) \ge 0 \quad \text{quindi} \quad \varphi(b) - \varphi(a) \ge g(b) - g(a) = f(b) \cdot u - f(a) \cdot u = (f(b) - f(a)) \cdot u = \|f(b) - f(a)\|.$$

$\square$

Dimostrazione. (del teorema del valor medio) Si applica il lemma con $\varphi(t) = \|f'\|_{[a,b]}\, t$. $\square$

1.3. **Rettificazione.** (*Studiare 3.3; di 3.4 fare la definizione di ascissa curvilinea*)

1.3.1. *Continuità dell'ascissa curvilinea.* Invece del macchinoso 3.6.22 del testo si può usare la seguente argomentazione:

. *Sia I intervallo di $\mathbb{R}$, Y spazio normato, $f : I \to Y$ localmente a variazione limitata; dato $c \in I$ sia $\lambda_c : I \to \mathbb{R}$ l'ascissa curvilinea di f di punto iniziale c. Se f è continua in $a \in I$, allora λ_c è continua in a.*

Dimostrazione. Dimostriamo che se f è continua a destra/sinistra in a allora anche $\lambda = \lambda_c$ è continua a destra/sinistra in a. Essendo crescente, λ_c ha ovviamente limite destro finito in a:

$$\lambda(a^+) := \lim_{t \to a^+} \lambda(t)\, (= \inf\{\lambda(t) : t > a\})$$

Basta quindi dimostrare che si ha $\lim_{t \to a^+}(\lambda(t) - \lambda(a)) (= \lim_{t \to a^+} Vf([a, t])) = 0$. Dato $\varepsilon > 0$ esiste $b \in I$ con $b > a$, tale che $\lambda(t) - \lambda(a^+) \le \varepsilon$ per $t \in]a, b]$, ed anche, essendo f continua destra in a, $\|f(t) - f(a)\| \le \varepsilon$ per $t \in]a, b]$. Si ha $\lambda(t) - \lambda(a) = Vf([a, t])$; scegliamo una suddivisione $t_0 = a < t_1 < \cdots < t_m = t$ tale che $\sum_{k=1}^m \|f(t_k) - f(t_{k-1})\| \ge Vf([a, t]) - \varepsilon$; si ha

$$Vf([a, t]) - \varepsilon \le \sum_{k=1}^m \|f(t_k) - f(t_{k-1})\| = \|f(t_1) - f(a)\| + \sum_{k=2}^m \|f(t_k) - f(t_{k-1})\| \le \|f(t_1) - f(a)\| + Vf([t_1, t]);$$

se $t \in]a, b]$ si ha anche $t_1 \in]a, b]$ e quindi $\|f(t_1) - f(a)\| \le \varepsilon$; inoltre $Vf([t_1, t]) = \lambda(t) - \lambda(t_1) \le \varepsilon$, dato che si ha $\lambda(a^+) \le \lambda(t_1) \le \lambda(t) \le \lambda(a^+) + \varepsilon$. Ne segue $Vf([a, t]) \le 3\varepsilon$ per $t \in]a, b]$; abbiamo provato che si ha $\lim_{t \to a^+} Vf([a, t])) = 0$. In modo analogo si prova che si ha $\lim_{t \to a^-} Vf([t, a]) = 0$ se f è continua a sinistra in a. $\square$

Osservazione. Si potrebbe in generale provare il seguente risultato (se Y è completo):

$$\lambda(a) = \lim_{t\to a^-} \lambda(t) + \|f(a) - f(a^-)\|; \qquad \lim_{t\to a^+} \lambda(t) = \lambda(a) + \|f(a^+) - f(a)\|,$$

con tecnica molto simile a quanto appena visto. Quindi λ è continua a sinistra/destra in a se e solo se tale è f.

1.3.2. *Una curva ovunque derivabile ma non rettificabile.* L'esempio dato in 3.3 del testo AnDue è di una curva continua non rettificabile; tale curva è però non derivabile in un punto (per $t = 0$). Non è a questo che si deve la non rettificabilità, come il seguente esempio mostra.

Esempio 2. $f : [0, 1] \to \mathbb{R}^2$ data da $f(t) = (t, g(t))$, dove $g(t) = t^2 \cos(\pi/t^2)$ per $t > 0$, e $g(0) = (0, 0)$. Si vede facilmente che f è derivabile ovunque, si ha $f'(0) = (1, 0)$. Prendiamo i punti $a_k = 1/\sqrt{k}$, $k = 1, \dots, m$, con l'associata suddivisione $\{t_0 = 0, t_1 = a_m, \dots, t_{m+1} = a_1\}$. Si ha

$$\sum_{k=1}^{m+1} |f(t_k) - f(t_{k-1})| \geq \sum_{k=2}^{m+1} |f(t_k) - f(t_{k-1})| = \sum_{k=2}^{m} |g(a_k) - g(a_{k-1})| =$$
$$\sum_{k=2}^{m} \left| \frac{(-1)^k}{k} - \frac{(-1)^{k-1}}{k-1} \right| = \sum_{k=2}^{m} \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{k-1} \right) \geq \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k},$$

che chiaramente tende all'infinito al tendere di m all'infinito.

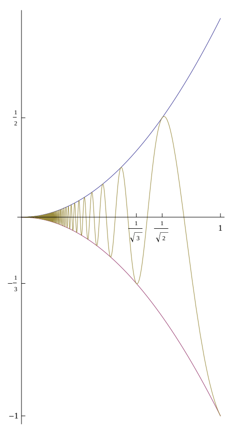

Figura 1. $t \mapsto (t, t^2 \cos(\pi/t^2))$: derivabile ovunque ma a variazione illimitata.

1.3.3. Se I è intervallo di $\mathbb{R}$ ed Y è spazio normato:

Lemma. *Sia $f : I \to Y$ curva continua; f è localmente rettificabile se e solo se esiste una funzione crescente $\varphi : I \to \mathbb{R}$ tale che $\|f(b) - f(a)\| \leq \varphi(b) - \varphi(a)$ per ogni coppia di punti $a, b \in I$, con $a < b$; in tal caso si ha anche $Vf([a, b]) \leq \varphi(b) - \varphi(a)$. Se $f \in C^1(I)$, una tale funzione è $\varphi(t) = \int_c^t \|f'(\theta)\| \, d\theta$, dove c è un qualsiasi punto di I, ed in tal caso si ha*

$$\lambda_c(t) = \varphi(t) = \int_c^t \|f'(s)\| \, ds \quad \textit{per ogni } t \in I.$$

Dimostrazione. Se f è localmente rettificabile, dato $c \in I$ la funzione λ_c, ascissa curvilinea di origine c, verifica $\|f(b) - f(a)\| \leq \lambda_c(b) - \lambda_c(a)$, ed è monotona crescente. Inversamente, se $\varphi : I \to \mathbb{R}$ è come nell'enunciato, fissati $a, b \in I$ con $a < b$ ed una suddivisione $a = t_0 < t_1 < \dots < t_m = b$ si ha

$$\sum_{k=1}^{m} \|f(t_k) - f(t_{k-1})\| \leq \sum_{k=1}^{m} (\varphi(t_k) - \varphi(t_{k-1})) = \varphi(b) - \varphi(a),$$

di modo che $Vf[a, b] \leq \varphi(b) - \varphi(a)$. Se $f \in C^1(I)$ e $\varphi(t) = \int_c^t \|f'(s)\| \, ds$ si ha $\|f'(t)\| = \varphi'(t)$ per ogni $t \in I$ per cui $\|f(b) - f(a)\| \leq \varphi(b) - \varphi(a)$ per ogni coppia $a, b \in I$ con $a < b$, in base a 1.2.2.

Dati poi $s, t \in I$ con $t < s$ si ha

$$\|f(s) - f(t)\| \leq Vf([t, s]) = \lambda_c(s) - \lambda_c(t) \leq \varphi(s) - \varphi(t),$$

da cui, dividendo per $s-t>0$

$$\left\|\frac{f(s)-f(t)}{s-t}\right\| \le \frac{\lambda_c(s)-\lambda_c(t)}{s-t} \le \frac{\varphi(s)-\varphi(t)}{s-t};$$

dato che tali espressioni sono invarianti per lo scambio di t ed s is conclude che la relazione precedente vale per $t, s \in I$ con $t \neq s$; tenendo fisso t e facendo tendere s a t si ha

$$\|f'(t)\| \le \lim_{s\to t} \frac{\lambda_c(s)-\lambda_c(t)}{s-t} \le \|f'(t)\|,$$

e per il teorema dei carabinieri si ha $\lambda_c'(t) = \|f'(t)\| = \varphi'(t)$ per ogni $t \in I$, e quindi $\lambda_c(t) = \varphi(t)$, dato che $\lambda_c(c) = \varphi(c) = 0$ per ogni $t \in I$. □

È ormai immediato il teorema:

. Formula per la lunghezza di una curva *Sia I intervallo di $\mathbb{R}$, Y spazio normato, $f : I \to Y$ funzione di classe C^1. Allora f è localmente rettificabile e si ha*

$$Vf([a,b]) = \int_a^b \|f'(t)\|\, dt \qquad \textit{per ogni} \quad a, b \in I,\ a < b.$$

Dimostrazione. Si ha, dal lemma precedente, per gli $a, b \in I$ con $a < b$:

$$Vf([a,b]) = \lambda_c(b) - \lambda_c(a) = \int_a^b \|f'(t)\|\, dt,$$

qualunque sia $c \in I$. □

1.3.4. *Arco di parabola.*

Esercizio 3. Trovare la lunghezza dell'arco di parabola di equazione $y = x^2$, $a \le x \le b$

Risoluzione. La parametrizzazione è $x \mapsto (x, x^2)$ per cui il vettore derivato è $(1, 2x)$ e la lunghezza è

$$\int_a^b \sqrt{1^2 + (2x)^2}\, dx = \int_a^b \sqrt{1 + 4x^2}\, dx = 2\int_a^b \sqrt{(1/2)^2 + x^2}\, dx;$$

sul Formulario alla fine del libro si trova

$$\int \sqrt{a^2 + x^2}\, dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{a^2+x^2} + a^2 \operatorname{settsinh} \frac{x}{|a|}\right) + k,$$

per cui la lunghezza vale

$$\left[x\sqrt{(1/2)^2 + x^2} + \frac{1}{4} \operatorname{settsinh}(2x)\right]_{x=a}^{x=b} =$$
$$\left(b\sqrt{(1/2)^2 + b^2} - a\sqrt{(1/2)^2 + a^2}\right) + \frac{1}{4}(\operatorname{settsinh}(2b) - \operatorname{settsinh}(2a)).$$

□

Esercizio 4. Scrivere l' ascissa curvilinea della cicloide $f(\vartheta) = a(\vartheta - \sin\vartheta, 1 - \cos\vartheta)$ con inizio in $\vartheta = 0$, e tracciarne il grafico.

Risoluzione. Si ha $f'(\vartheta) = a(1 - \cos\vartheta, \sin\vartheta)$ e quindi $|f'(\vartheta)| = 2a|\sin(\vartheta/2)|$, per cui si ha

$$\lambda(\vartheta) = 2a \int_0^\vartheta \left|\sin\left(\frac{\xi}{2}\right)\right| d\xi.$$

si noti che λ è strettamente crescente, avendo derivata $2a|\sin(\vartheta/2)|$ sempre positiva e nulla solo su punti isolati. L'espressione di λ è complicata dalla presenza del modulo; se $0 \le \vartheta \le 2\pi$ si ha anche $0 \le \xi/2 \le \pi$ e quindi $|\sin(\xi/2)| = \sin(\xi/2)$, e l'integrale è

$$\lambda(\vartheta) = 4a\left[-\cos\left(\frac{\xi}{2}\right)\right]_{\xi=0}^{\xi=\vartheta} = 4a\left(1 - \cos\left(\frac{\vartheta}{2}\right)\right).$$

Se $2\pi \le \vartheta \le 4\pi$ scriviamo

$$\lambda(\vartheta) = 2a\int_0^{2\pi} \left|\sin\left(\frac{\xi}{2}\right)\right| d\xi + 2a\int_{2\pi}^{\vartheta} \left|\sin\left(\frac{\xi}{2}\right)\right| d\xi = \lambda(2\pi) - 4a\int_{2\pi}^{\vartheta} \frac{1}{2}\sin\left(\frac{\xi}{2}\right) d\xi =$$

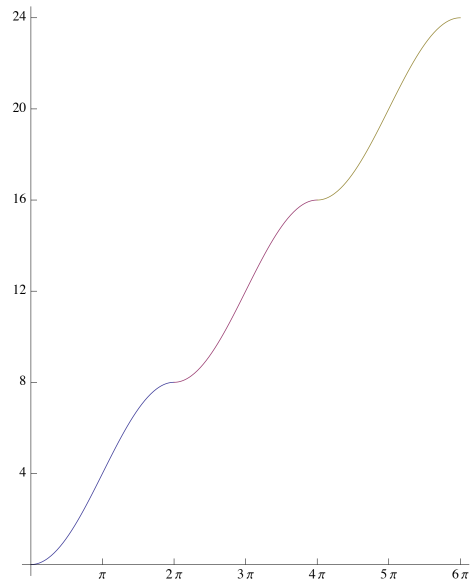

FIGURA 2. Ascissa curvilinea della cicloide.

$$8a + 4a\left[\cos\left(\frac{\xi}{2}\right)\right]_{xi=2\pi}^{\xi=\vartheta} = 8a + 4a\left(\cos\left(\frac{\vartheta}{2}\right) + 1\right).$$

proseguendo con un po'di pazienza si trova λ su tutto $\mathbb{R}$. Tuttavia è forse più semplice fare in questo modo: dalla "periodicità" della cicloide si comprende che se $\vartheta \in [2\pi, 4\pi]$ dovrà essere $\lambda(\vartheta) = \lambda(2\pi) + \lambda(\vartheta - 2\pi)$, ed in generale, se $2n\pi \le \vartheta \le (2n+2)\pi$, $\lambda(\vartheta) = \lambda(2n\pi) + \lambda(\vartheta - 2n\pi)$; dato che $2n\pi \le \vartheta \le (2n+2)\pi \iff n = [\vartheta/(2\pi)]$, parte intera di $\vartheta/(2\pi)$, e dato che $\lambda(2\pi) = 8a$ si ha, per ogni $\vartheta \in \mathbb{R}$:

$$\lambda(\vartheta) = 8[\vartheta/(2\pi)]a + 4a\left(1 - \cos\left(\frac{\vartheta}{2} - \pi\left[\frac{\vartheta}{2\pi}\right]\right)\right).$$

□

1.3.5. *Integrali curvilinei "al differenziale d'arco". Studiare AnDue, 3.5*

ESERCIZIO 5. Trovare il baricentro geometrico dell'arco di cicloide $\alpha(\vartheta) = a(\vartheta - \sin\vartheta, 1 - \cos\vartheta)$, con $\vartheta \in [0, 2\pi]$.

Risoluzione. Chiaramente l'arco in questione è simmetrico rispetto alla retta $x = \pi a$, e quindi l'ascissa del baricentro è πa. Ricordiamo poi che la lunghezza dell'arco è $8a$. Se y_b è l'ordinata del baricentro si ha

$$8a\, y_b = \int_\alpha y\,|d\alpha| = \int_0^{2\pi} a(1-\cos\vartheta)\,2a\,\sin\left(\frac{\vartheta}{2}\right)\,d\vartheta = 4a^2\int_0^{2\pi}\sin^3\left(\frac{\vartheta}{2}\right)\,d\vartheta$$
$$8a^2\int_0^{\pi}\sin^3 t\,dt = 8a^2\int_0^{\pi}(1-\cos^2 t)\,\sin t\,dt = 8a^2\left[-\cos t + \frac{\cos^3 t}{3}\right]_0^{\pi} = 8a^2\left(1 - \frac{1}{3} + 1 - \frac{1}{3}\right) =$$
$$\frac{32}{3}\,a^2,$$

per cui il baricentro dell'arco ha ordinata

$$y_b = \frac{4}{3}a,$$

ed il baricentro dell'arco di cicloide è il punto di coordinate:

$$G = \left(\pi a, \frac{4}{3}a\right).$$

□

Esercizio 6. (*De Marco/Mariconda, Es 3.19*) Si ha un filo omogeneo pesante di densità lineare costante μ, disposto ad arco di circolo di raggio $a > 0$ ed angolo al centro di ampiezza $2\alpha > 0$. Trovare la distanza dal centro del baricentro ed il momento d'inerzia rispetto ad un asse per il baricentro perpendicolare al piano del circolo.

Risoluzione. La lunghezza del filo è ovviamente $l = 2\alpha\, a$, quindi la massa totale è $m = \mu\, l = 2\mu\alpha\, a$. Assunto un sistema di coordinate con centro nel centro del circolo, ed asse x l'asse per il centro che è asse di simmetria del filo si ha per l'ascissa del baricentro

$$\begin{aligned} x_G =&\frac{1}{m}\int_\gamma \mu\, x|d\gamma| = \frac{\mu}{m}\int_{-\alpha}^{\alpha} a\,\cos\vartheta\, a\, d\vartheta = 2\frac{\mu\, a^2}{m}\int_0^{\alpha}\cos\vartheta\, d\vartheta = \\ =&2\frac{\mu\, a^2}{m}\,\sin\alpha = \frac{(2a\alpha\,\mu)\, a}{m}\frac{\sin\alpha}{\alpha} = a\,\frac{\sin\alpha}{\alpha}; \end{aligned}$$

ovviamente x_G è anche la distanza dal centro del baricentro.

Momento d'inerzia: Il quadrato della distanza dal baricentro del punto $a(\cos\vartheta, \sin\vartheta)$ è

$$\mathrm{dist}^2 = a^2\left(\left(\cos\vartheta - \frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2 + \sin^2\vartheta\right) = a^2\left(1 + \frac{\sin^2\alpha}{\alpha^2} - 2\frac{\sin\alpha}{\alpha}\,\cos\vartheta\right),$$

per cui

$$\begin{aligned} I =& \int_\gamma \mu\,\mathrm{dist}^2\,|d\gamma| = \int_{-\alpha}^{\alpha}\mu\, a^2\left(1 + \frac{\sin^2\alpha}{\alpha^2} - 2\frac{\sin\alpha}{\alpha}\,\cos\vartheta\right) a\, d\vartheta = \\ =&2\mu\, a^3\left(\alpha + \frac{\sin^2\alpha}{\alpha} - 2\frac{\sin\alpha}{\alpha}\,[-\sin\vartheta]_{\vartheta=0}^{\vartheta=\alpha}\right) = \\ =&2\mu\, a^3\left(\alpha - \frac{\sin^2\alpha}{\alpha}\right) = 2\mu\, a^3\alpha\,\left(1 - \frac{\sin^2\alpha}{\alpha^2}\right) = m\, a^2\left(1 - \frac{\sin^2\alpha}{\alpha^2}\right). \end{aligned}$$

$\square$

1.3.6. *Distanza media dei punti di un ellisse da uno dei fuochi.* Ricordiamo che dati due punti del piano F_1 ed F_2 a distanza $2c > 0$ fra loro ed un reale $a > c$ l'ellisse che ha F_1 ed F_2 come fuochi, ed eccentricità $\eta = c/a$ è il luogo dei punti P del piano tali che $|P - F_1| + |P - F_2| = 2a$. Siano ρ_1, ρ_2 le funzioni distanza da F_1 ed F_2 rispettivamente; se assumiamo un sistema di coordinate centrato nel punto medio del segmento di estremi F_1 ed F_2, con la retta di tale segmento come asse x, l'equazione dell'ellisse si scrive ($b^2 = a^2 - c^2$ semiasse minore, a semiasse maggiore)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

ed una possibile parametrizzazione dell'ellisse è $\gamma(\varphi) = (a\,\cos\varphi,\, b\,\sin\varphi)$, con $\varphi \in [-\pi, \pi]$. La distanza media di un punto dell'ellisse da uno dei due fuochi è (per definizione di media di una funzione su una curva: l'integrale della funzione sulla curva, fatto rispetto all'elemento di lunghezza, diviso per la lunghezza) è:

$$d_{\mathrm{media}} = \frac{1}{l}\int_\gamma \rho_1(x,y)\,|d\gamma|;$$

un calcolo diretto di tale integrale è proibitivo (la sola lunghezza dell'ellisse comporta integrali che non sappiamo fare). Ma si intuisce (e non sarebbe difficile dimostrare rigorosamente) che la distanza media dall'altro fuoco sia uguale alla precedente, cioè che sia anche

$$d_{\mathrm{media}} = \frac{1}{l}\int_\gamma \rho_2(x,y)\,|d\gamma|,$$

per cui, sommando i due integrali si ottiene:

$$2\,d_{\mathrm{media}} = \frac{1}{l}\int_\gamma(\rho_1(x,y) + \rho_2(x,y))\,|d\gamma| = \frac{1}{l}\int_\gamma(2a)\,|d\gamma| = \frac{2a}{l}\int_\gamma|d\gamma| = \frac{2a}{l}\,l = 2a,$$

da cui

$$d_{\mathrm{media}} = a,\ \text{semiasse maggiore dell'ellisse.}$$

Se si assume un sistema di coordinate polari centrato in uno dei fuochi, con asse polare la retta dal fuoco verso il vertice più vicino, l'equazione polare dell'ellisse è $r = r(\vartheta) = p/(1 + \eta \cos\vartheta)$, con $p = b^2/a$ *parametro dell'ellisse.* Si potrebbe pensare che la quantità

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} r(\vartheta)\,d\vartheta = \frac{p}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{d\vartheta}{1+\eta\cos\vartheta}$$

media della funzione $\vartheta \mapsto r(\vartheta)$ su un periodo, abbia pure il diritto di essere chiamata distanza media dei punti dell'ellisse dal fuoco. L'integrale precedente è riconducibile ad integrali di funzioni razionali con la solita sostituzione $\vartheta = 2\arctan t$ (formule parametriche, $\cos\vartheta = (1-\tan^2(\vartheta)/2))/(1+\tan^2(\vartheta/2))$: sorprendentemente il risultato è b, semiasse minore dell'ellisse, che quindi è la distanza media fatta rispetto all'angolo ϑ.

1.3.7. *Convergenza uniforme e lunghezza.* Dato un intervallo compatto $[a, b]$, ed uno spazio normato Y, $C([a, b], Y)$ è uno spazio vettoriale che può essere normato con la norma uniforme

$$\|f\|_u = \max|\{\|f(t)\|_Y : t \in [a, b]\} \qquad \text{(si scrive anche } \|f\|_\infty \text{ invece di } \|f\|_u).$$

Tale norma, anche se ristretta al sottospazio delle funzioni di classe C^1 non rende la lunghezza continua. In altre parole, si hanno successioni f_n di funzioni di classe C^1 che convergono uniformemente su $[a, b]$ a funzioni f di classe C^1, ma tali che $Vf_n([a, b])$ non tende $Vf([a, b])$. Gli esempi sono facili da trovare; scegliamo il seguente che si può interpretare dicendo che una molla strettamente arrotolata ha una lunghezza superiore alla lunghezza del suo "asse" (i termini sono mal definiti, sono usati in modo intuitivo). Sia $[a, b] = [0, T]$ con $T > 0$, e sia $f_n : [0, T] \to \mathbb{R}^3$ data da $f_n(t) = ((R/n)\cos(n\omega t), (R/n)\sin(n\omega t), t)$, dove $R, \omega > 0$ sono costanti ("molle": sono eliche che si avvolgono con sempre più spire su cilindri di raggio sempre più piccolo). Al tendere di n all'infinito, $f_n(t)$ tende a $f(t) = (0, 0, t)$, ed f_n converge ad f anche uniformemente su $[0, T]$, infatti

$$|f(t) - f_n(t)| = |(-(R/n)\cos(n\omega t), -(R/n)\sin(n\omega t), 0)| = \frac{R}{n} \quad \text{quindi} \quad \|f - f_n\|_u = \frac{R}{n},$$

che ovviamente tende a 0 al tendere di n all'infinito. Ma le lunghezze sono costanti: si ha infatti

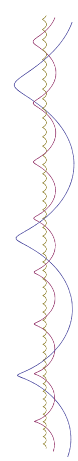

FIGURA 3. Tracce di f_3, f_8, f_{50}.

$$|f_n'(t)| = \sqrt{(R\omega)^2 + 1} \quad \text{per ogni } n = 1, 2, 3, \dots \text{ ed ogni } t \in [0, T]$$

e quindi

$$Vf_n([0, T]) = \int_0^T |f_n'(t)|\,dt = T\sqrt{(R\omega)^2 + 1} \quad \text{mentre} \quad Vf([0, T]) = T < T\sqrt{(R\omega)^2 + 1}.$$

La convergenza nella norma C^1 invece implica il passaggio al limite per le lunghezze: se consideriamo su $C^1([a, b], Y)$ la norma C^1, che è $\|f\|_u + \|f'\|_u$, la funzione $f \mapsto Vf([a, b])$ è continua da $C^1([a, b], Y)$ ad

$\mathbb{R}$. Infatti la convergenza uniforme della successione delle derivate implica la convergenza uniforme della successione delle norme delle derivate, e questa a sua volta implica la convergenza degli integrali:

$$\max\{\|f'(t)\| - \|f_n'(t)\|| : t \in [a,b]\} \le \max\{\|f'(t) - f_n'(t)\| : t \in [a,b]\} = \|f' - f_n'\|_u,$$

da cui

$$|Vf([a,b]) - Vf_n([a,b])| = \left|\int_a^b (\|f'(t)\| - \|f_n'(t)\|)\,dt\right| \le \int_a^b |\|f'(t)\| - \|f_n'(t)\|| \,dt \le$$
$$\le \int_a^b \|f' - f_n'\|_u\,dt = \|f' - f_n'\|_u\,(b-a).$$

Osservazione. Esiste una norma sulle funzioni $C^1([a,b],Y)$ che rende continua la lunghezza, più debole della norma C^1, e più forte della norma uniforme; essa è la norma della variazione totale:

$$\|f\|_v = |f(a)| + \|f'\|_1 \left(= |f(a)| + \int_a^b \|f'(t)\|\,dt \right),$$

Vedi AnDue, 2.8.5. È anche definita sullo spazio $BV([a,b],Y)$ delle funzioni a variazione limitata come $\|f\|_v = |f(a)| + Vf([a,b])$; quest'ultimo è spazio di Banach in questa norma, se Y è di Banach.

1.4. **Cambiamenti di parametro.** Data una curva continua $f : I \to Y$, con I intervallo di $\mathbb{R}$ ed Y normato, come detto spesso si pensa al parametro $t \in I$ come al tempo, e si immagina $f(t)$ come punto mobile al variare del tempo $t \in I$. Spesso è conveniente *riparametrizzare* la curva f, questo può fornire altre interpretazioni della curva stessa. Dato un altro intervallo J, ed una funzione continua e suriettiva $\varphi : J \to I$, $t = \varphi(\theta)$, si ottiene un'altra curva $g = f \circ \varphi : J \to Y$, la riparametrizzazione di f ottenuta applicando il cambiamento di parametro (o di variabile) $t = \varphi(\theta)$.

Esempio 7. Dato $I = [-1,1]$, $Y = \mathbb{R}^2$, si ha la parametrizzazione cartesiana della semicirconferenza $f : I \to \mathbb{R}^2$ data da $f(x) = (x, \sqrt{1-x^2})$; usando il cambiamento di parametro $\varphi(\theta) = \cos\theta$, $\varphi : [0,\pi] \to [-1,1]$ si ottiene $g(\theta) = f \circ \varphi(\theta) = (\cos\theta, \sin\theta)$, parametrizzazione della semicirconferenza col parametro angolare θ.

Se $\varphi : J \to I$ è omeomorfismo dell'intervallo J sull' intervallo I, la riparametrizzazione si dice C^0-equivalente, e si dice C^1 equivalente quando φ è anche *diffeomorfismo* C^1 (verificare che sono relazioni di equivalenza; mostrare che la riparametrizzazione del precedente esempio è C^0- equivalente, ma non C^1-equivalente).

Si dimostra facilmente (vedi AnDue, 3.3.3) che riparametrizzazioni con omeomorfismi non alterano la lunghezza degli archi.

Definizione. Sia $f : I \to Y$ curva continua localmente rettificabile. Si dice che la parametrizzazione $f : I \to Y$ è con la lunghezza d'arco se per ogni coppia $a, b \in I$ con $a < b$ si ha $Vf([a,b]) = b - a$.

In altre parole, il parametro stesso t è un'ascissa curvilinea sulla curva f; infatti si dimostra subito che:

Proposizione. *Sia $f : I \to Y$ curva continua localmente rettificabile. Sono equivalenti:*

(i) *f è parametrizzata con la lunghezza d'arco.*
(ii) *Per ogni $c \in I$ si ha $\lambda_c(t) = t - c$, se $\lambda_c : I \to J$ è l'ascissa curvilinea di punto iniziale c.*
(iii) *Per almeno un $c \in I$ si ha $\lambda_c(t) = t - c$, se $\lambda_c : I \to J$ è l'ascissa curvilinea di punto iniziale c.*

Inoltre, f ammette riparametrizzazioni con la lunghezza d'arco se e solo se non ha tratti di costanza (cioè, non esiste nessun subintervallo non degenere di I su cui f è costante); tali riparametrizzazioni sono C^0-equivalenti.

Dimostrazione. Le equivalenze tra (i), (ii) ed (iii) sono banali. Per l'ultima affermazione, si noti anzitutto che se una curva ha tratti di costanza, tutte le sue riparametrizzazioni ne hanno, e chiaramente una curva parametrizzata con la lunghezza d'arco non ha tratti di costanza. Se poi f è continua e localmente rettificabile, fissato $c \in I$ la funzione $\lambda_c : I \to \mathbb{R}$ è crescente e continua (vedi 1.3.1), ed è strettamente crescente se e solo se f non ha tratti di costanza, come è immediato vedere. In tali ipotesi quindi $J = \lambda_c(I)$ è intervallo di $\mathbb{R}$ e λ_c induce un omeomorfismo strettamente crescente di I su J; se $\varphi : J \to I$ è l'omeomorfismo inverso, è immediato vedere che $g = f \circ \varphi : J \to Y$ è parametrizzata con la lunghezza d'arco. □

È immediato mostrare che una curva $f : I \to Y$ di classe C^1 è parametrizzata con la lunghezza d'arco se e solo se $\|f'(t)\| = 1$ per ogni $t \in I$: infatti questo accade se e solo se $\lambda_c(t) = t - c$, come sopra visto, e quindi se e solo se $1 = \lambda_c'(t) = \|f'(t)\|$ per ogni $t \in I$. Insomma, le curve parametrizzate con la lunghezza d'arco sono quelle percorse a velocità costantemente uguale ad 1.

Esercizio 8. Provare che la curva $f : I \to Y$ di classe C^1 ha una riparametrizzazione C^1-equivalente con la lunghezza d'arco se e solo se $f'(t)$ non è mai nullo, per nessun $t \in I$.

Esercizio 9. Sia I intervallo di $\mathbb{R}$, Y spazio normato, $f : I \to Y$ funzione. Provare che se f è localmente lipschitziana, allora è localmente rettificabile.

Se $f : I \to Y$ è parametrizzata con la lunghezza d'arco, allora è lipschitziana con costante di Lipschitz esattamente 1 (e non strettamente minore di 1).

Esercizio 10. Sia $a < b$ con $a \in \mathbb{R}$, $b \le \infty$, ed $f : [a, b[\to Y$ funzione, Y spazio normato. Provare che $Vf([a, b[) = \lim_{y\to b^-} Vf([a, y])$; analogamente per $f :]a, b] \to Y$ con $a < b$ e $b \in \mathbb{R}$, $-\infty \le a$ provare che $Vf(]a, b]) = \lim_{x\to a^+} Vf([x, b])$; infine, per ogni intervallo aperto I ed $f : I \to Y$ si ha, se $a = \inf I$ e $b = \sup I$:

$$Vf(I) = \lim_{x\to a^+,\, y\to b^-} Vf([x, y]).$$

Quindi: se $f \in C^1(I, Y)$ (ed I è intervallo non compatto) la variazione totale di f su I è finita se e solo se $\|f'\|$ è integrabile in senso generalizzato su I, ed in tal caso si ha

$$Vf(I) = \int_I \|f'(t)\|\, dt \quad \text{(integrale generalizzato nel senso di Riemann).}$$

Esercizio 11. Sia I intervallo di $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$ funzione.

(i) Provare che se f è monotòna, allora f è localmente a variazione limitata.

(ii) Diciamo che f è monotona a tratti su I se esiste una suddivisione $a_0 < a_1 < \cdots < a_m$ di I tale che f è monotòna su ciascuno degli intervalli $]-\infty, a_0] \cap I$, $[a_{k-1}, a_k]$, per $k = 1, \dots, m$, $[a_m, \infty[\cap I$. Provare che se f è monotòna a tratti, allora è localmente a variazione limitata.

(ii) ($\odot\odot$ *richiede varie nozioni sulle funzioni convesse*) Provare che se f è (continua e) convessa, allora f è monotòna a tratti (e quindi localmente a variazione limitata).

1.4.1. *Soluzioni degli esercizi.*

Risoluzione. (*di Es 8*) Se $\varphi : J \to I$ di classe C^1 riparametrizza f, $g = f \circ \varphi$, e si ha $f'(t) = 0$ per un $t \in I$, allora per ogni $\theta \in J$ con $\varphi(\theta) = t$ (certo esistente per suriettività di φ) si ha $g'(\theta) = f'(t)\, \varphi'(\theta) = 0\, \varphi'(\theta) = 0$: in altre parole, se $f'(t)$ si annulla per qualche t, tutte le riparametrizzazioni derivabili hanno derivata nulla in qualche punto. Dato che una riparametrizzazione C^1 con lunghezza d'arco deve avere derivata costantemente di modulo 1, la condizione che $f'(t)$ non sia mai nulla è necessaria per quanto si vuole. Ma è anche sufficiente: fissato $c \in I$ si considera $\lambda(t) = \lambda_c(t) = \int_c^t \|f'(\theta)\|\, d\theta$; λ è funzione C^1 con derivata continua $\lambda'(t) = \|f'(t)\| > 0$, e quindi è un diffeomorfismo C^1 di I sulla sua imagine $J = \lambda(I)$; se $\varphi = \lambda^{-1}$ è il diffeomorfismo inverso, si ha subito che $g = f \circ \varphi : J \to Y$ è riparametrizzazione di f con la lunghezza d'arco. □

Risoluzione. (*di Es 9*) Sia $[a, b] \subseteq I$ sub–intervallo compatto di I, e sia $L(= L_{[a,b]})$ costante di Lipschitz per $f_{|[a,b]}$. Data un'arbitraria suddivisione $t_0 = a < t_1 < \cdots < t_m = b$ si ha

$$\sum_{k=1}^{m} \|f(t_k) - f(t_{k-1})\| \le \sum_{k=1}^{m} L\,(t_k - t_{k-1}) = L(b - a),$$

per cui $Vf([a, b]) \le L_{[a,b]}\,(b-a)$. Questo mostra che la lipschitzianità locale implica la locale rettificabilità. Se il parametro t è la lunghezza d'arco si ha, dati $a, b \in I$ con $a < b$:

$$\|f(b) - f(a)\| \le Vf([a, b]) = b - a,$$

per cui 1 è una costante di Lipschitz per f su tutto I. D'altra parte se in un subintervallo $[a, b]$ di I si ha una costante di Lipschitz L per f, si ha, come sopra visto, $Vf([a, b]) \le L\,(b - a)$, quindi $b - a \le L\,(b - a)$ da cui $L \ge 1$.

□

Risoluzione. (*di Es 10*) Dato che $x \mapsto Vf([a,y])$ è crescente il limite esiste e si ha $\lim_{x\to b^-} Vf([a,x]) = \sup\{Vf([a,x]) : a \le x < b\}$. Presa un'arbitraria suddivisione di $[a,b[$, $x_0 = a < x_1 < \cdots < x_m = x$ si ha

$$\sum_{k=1}^{m} \|f(x_k) - f(x_{k-1})\| \le Vf([a,x]) \le \sup\{Vf([a,x]) : a \le x < b\} = \lim_{x\to b^-} Vf([a,x]),$$

quindi

$$\sum_{k=1}^{m} \|f(x_k) - f(x_{k-1})\| \le \lim_{x\to b^-} Vf([a,x])$$

per ogni suddivisione di $[a,b[$, da cui, prendendo l'estremo superiore a primo membro si ha

$$Vf([a,b[) \le \lim_{x\to b^-} Vf([a,x]);$$

d'altra parte si ha $Vf([a,b[) = Vf([a,x]) + Vf([x,b[) \ge Vf([a,y])$ per ogni $y \in [a,b[$, e si conclude. In modo analogo si prova che $Vf(]a,b]) = \lim_{x\to a^+} Vf([x,b])$; e da questi due fatti subito si ottiene il risultato per l'intervallo aperto, e quindi il corollario finale sull'integrale generalizzato. □

Risoluzione. (*di Es 11*) (i) è banale: dati $a,b \in I$ con $a < b$ ed una suddivisione $x_0 = a < x_1 < \cdots < x_m = b$ si ha, se f è crescente

$$\sum_{k=1}^{m} |f(x_k) - f(x_{k-1})| = \sum_{k=1}^{m} (f(x_k) - f(x_{k-1})) = f(b) - f(a),$$

per cui $Vf([a,b]) = f(b) - f(a)$ se f è crescente, ed allo stesso modo $Vf([a,b]) = f(a) - f(b)$ se f è decrescente.

(ii) Immediato: dato un subintervallo compatto $[a,b] \subseteq I$, se p è il minimo $k \in \{0,\dots,m\}$ tale che $a_k \in [a,b]$ e q è il massimo, si ha

$$Vf([a,b]) = |f(a_p) - f(a)| + \sum_{k=p+1}^{q} |f(a_k) - f(a_{k-1})| + |f(b) - f(a_q)|.$$

(iii) Ricordiamo che una funzione continua in un intervallo, se non è strettamente monotòna, non è iniettiva. Se quindi f non è strettamente monotòna esistono $a,b \in I$, con $a < b$, tali che si abbia $f(a) = f(b)$. La convessità implica che $f(x) \le f(a) = f(b)$ per ogni $x \in [a,b]$; esiste quindi $c \in]a,b[$ tale che $f(c) = \min f([a,b])$, in particolare c è di minimo locale per f in I. Mostriamo ora che

. *Se $c \in I$ è di minimo locale per f in I, ed f è convessa in I, allora f è decrescente su $\{x \in I : x \le c\}$ e crescente su $\{x \in I : x \ge c\}$.*

Basta ricordare che se f è convessa allora i rapporti incrementali sono crescenti, cioè

$x \mapsto (f(x) - f(a))/(x-a)$ è funzione crescente di $I \setminus \{a\}$ in $\mathbb{R}$, per ogni fissato $a \in I$.

Allora se $x \in I$ ed $x > c$ si ha, per $c < t < x$:

$$\frac{f(t) - f(c)}{t - c} \le \frac{f(x) - f(c)}{x - c};$$

ma se t è abbastanza vicino a c si ha $f(c) \le f(t)$ (perchè c è di minimo locale), quindi il rapporto $(f(t) - f(c))/(t-c)$ è non negativo; si è provato che, per ogni $x \in I$ con $x > c$ si ha

$$0 \le \frac{f(x) - f(c)}{x - c};$$

preso y con $c < y < x$ si ha allora, per la crescenza di $y \mapsto (f(x) - f(y))/(x-y)$:

$$0 \le \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \le \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \quad \text{da cui} \quad f(y) \le f(x);$$

si è provato che f è crescente all destra di c, in modo analogo se ne prova la decrescenza alla sinistra.

Osservazione. L'ipotesi di continuità di f è in realtà superflua. Basta ricordare che una funzione convessa è continua all'interno dell'intervallo suo dominio.

□