Analisi 2

Roberto Monti

Appunti del Corso - Versione del 14 Dicembre 2012

Indice

CAPITOLO 1

Programma

Convergenza uniforme: Sup-norma. Teorema dello scambio dei limiti, continuità del limite uniforme. Criterio di Abel-Dirichlet per la convergenza uniforme di serie. Teorema di Dini. Convergenza uniforme e differenziabilità, scambio di somma e derivata. Convergenza uniforme e integrale di Riemann, scambio di limite e integrale.

Spazi metrici. Continuazione: Tutte le norme in $\mathbb{R}^n$ sono equivalenti. Lo spazio $C(K)$ è completo. Spazio delle trasformazioni lineari e continue, norma di un operatore, caratterizzazione della continuità. Funzioni Lipschitziane. Teoremi di punto fisso ed applicazioni.

Curve in $\mathbb{R}^n$. Curve regolari. Vettore tangente. Lunghezza e curve rettificabili. Teorema di rettificabilità. Riparametrizzazione a lunghezza d'arco.

Calcolo differenziale in $\mathbb{R}^n$. Derivate parziali e direzionali. Funzioni differenziabili. Differenziale della funzione composta. Teoremi del valor medio. Funzioni di classe C^1. Punti critici e punti di max/min locale. Teorema di Rademacher. Derivate di ordine superiore. Teorema di Schwarz. Formula di Taylor.

Equazioni differenziali ordinarie. Equazioni lineari del primo ordine. Equazioni a variabili separabili. Problema di Cauchy. Esistenza e unicità locale della soluzione con ipotesi Lipschitz. Soluzioni massimali. Lemma di Gronwall e soluzioni globali. Studio qualitativo. Cenni alle equazioni alle derivate parziali.

Teorema di Dini. Diffeomorfismi e diffeomorfismi locali. Teorema di invertibilità locale. Teorema della funzione implicita.

Sottovarietà differenziabili di $\mathbb{R}^n$. Equazione locale e parametrizzazioni. Sottovarietà. Teorema di equivalenza. Spazio tangente e spazio normale.

CAPITOLO 2

Convergenza uniforme

1. Convergenza uniforme e continuità

Siano X un insieme ed $f : X \to \mathbb{R}$ una funzione. Definiamo la "sup-norma" di f su X

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in X} |f(x)|.$$

La "sup-norma" verifica le seguenti proprietà elementari:

1) Si ha $\|f\|_\infty < \infty$ se e solo se f è limitata su X.
2) Vale la subadditività:

$$\begin{aligned}\|f+g\|_\infty &= \sup_{x\in X} |f(x)+g(x)| \le \sup_{x\in X} |f(x)| + |g(x)| \\ &\le \sup_{x\in X} |f(x)| + \sup_{x\in X} |g(x)| = \|f\|_\infty + \|g\|_\infty.\end{aligned}$$

3) Sia $f_n : X \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, una successione di funzioni. La successione $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge uniformemente su* X alla funzione $f : X \to \mathbb{R}$ se

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0.$$

   Per questo motivo, la "norma" $\|\cdot\|_\infty$ si chiama anche "norma della convergenza uniforme".
4) Sia X uno spazio metrico compatto e sia $f \in C(X)$. Per il Teorema di Weierstrass, la funzione $x \mapsto |f(x)|$ assume massimo su K. Dunque, nella definizione di sup-norma il sup può essere sostituito con un max:

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in X} |f(x)| = \max_{x\in X} |f(x)|.$$

   È immediato controllare che lo spazio vettoriale $C(X)$ è normato da $\|\cdot\|_\infty$. Vedremo nel Teorema 2.1 che $C(X)$ è uno spazio di Banach.

Esempio 1.1 (Palla nella norma $\|\cdot\|_\infty$). Ad esempio, nel caso $X = [0,1]$ per ogni $f \in C([0,1])$ ed $r > 0$, la palla

$$\begin{aligned}B_r(f) &= \{g \in C([0,1]) : \|g-f\|_\infty < r\} \\ &= \big\{g \in C([0,1]) : |f(x)-g(x)| < r \text{ per ogni } x \in [0,1]\big\}\end{aligned}$$

è l'insieme delle funzioni continue g il cui grafico è contenuto nella striscia di spessore $2r$ attorno al grafico di f.

Teorema 1.2 (Scambio dei limiti). Siano (X,d) uno spazio metrico ed $f, f_n : X \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, funzioni. Supponiamo che:

(i) $\lim\limits_{n\to\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0$;

(ii) Ogni funzione f_n è continua nel punto $x_0 \in X$.

Allora esistono e sono uguali i seguenti limiti

$$\lim_{x \to x_0} \lim_{n \to \infty} f_n(x) = \lim_{n \to \infty} \lim_{x \to x_0} f_n(x). \tag{1.1}$$

In particolare, f è continua in x_0.

Dim. Dobbiamo provare che

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Fissiamo $\varepsilon > 0$. Per la convergenza uniforme esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $n \geq \bar{n}$ si ha per ogni $x \in X$

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon/3$$

Scegliamo un $n \geq \bar{n}$. Per la continuità di f_n in x_0 esiste $\delta > 0$ tale che

$$d(x, x_0) < \delta \quad \Rightarrow \quad |f_n(x) - f_n(x_0)| < \varepsilon/3.$$

Dunque, per $d(x, x_0) < \delta$ avremo

$$|f(x) - f(x_0)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Questo prova la continuità di f nel punto x_0 e con ciò la formula sullo scambio dei limiti (1.1).

$\square$

Se le funzioni f_n del Teorema 1.2 sono continue in ogni punto allora anche la funzione limite f sarà continua in ogni punto. Dunque si ha il seguente corollario.

Corollario 1.3. Siano (X, d) uno spazio metrico ed $f, f_n : X \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, funzioni. Supponiamo che $f_n \in C(X)$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e che $\lim_{n \to \infty} \|f_n - f\|_\infty = 0$. Allora, anche $f \in C(X)$.

Osservazione 1.4. La definizione di sup-norma, il Teorema sullo scambio dei limiti e il Corollario 1.3 possono essere riformulati per funzioni a valori in $\mathbb{R}^k$ per qualsiasi $k \geq 1$.

Il prossimo teorema, noto come Teorema di Dini, dà condizioni sufficienti per avere la convergenza uniforme.

Teorema 1.5 (Dini). Sia K uno spazio metrico compatto, e siano $f, f_n : K \to \mathbb{R}$ funzioni continue, $n \in \mathbb{N}$. Supponiamo che:

i) $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$ per ogni $x \in K$ e per ogni $n \in \mathbb{N}$;
ii) $\lim_{n \to \infty} f_n(x) = f(x)$ per ogni $x \in K$.

Allora, la convergenza in ii) è uniforme su K.

Dim. Supponiamo per assurdo che esista $\varepsilon > 0$ tale che $\|f_n - f\|_\infty > \varepsilon$ per infiniti $n \in \mathbb{N}$. Dunque esiste una selezione crescente di indici $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ ed esistono punti $x_{n_k} \in K$ tali che

$$f(x_{n_k}) - f_{n_k}(x_{n_k}) > \varepsilon, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Siccome K è compatto, si può assumere senza perdere di generalità che esista $x_0 \in K$ tale che $x_{n_k} \to x_0 \in K$ per $k \to \infty$. Altrimenti, si estrae un'ulteriore sottosuccessione e ci si riconduce a questo caso.

Sia ora $m \in \mathbb{N}$ e sia $n_k \geq m$. Per la monotonia i) avremo $f_m(x_{n_k}) \leq f_{n_k}(x_{n_k})$, e dunque

$$f(x_{n_k}) - f_m(x_{n_k}) \geq f(x_{n_k}) - f_{n_k}(x_{n_k}) > \varepsilon, \quad \text{se } m \leq n_k.$$

Facendo tendere $k \to \infty$ e usando $x_{n_k} \to x_0$ insieme alla continuità di f ed f_m, si ottiene la disuguaglianza

$$f(x_0) - f_m(x_0) \geq \varepsilon, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Questo contraddice la ii) nel punto $x = x_0$. □

2. Criterio di Abel–Dirichlet per la convergenza uniforme

Partiamo dalla seguente formula di somma per parti.

Lemma 2.1. Siano $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ due successioni reali o complesse, supponiamo che la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converga e poniamo $A_n = \sum_{k=n}^{\infty} a_k$. Allora, per ogni $1 \leq M \leq N$ vale la formula di somma per parti

$$\sum_{n=M}^{N} a_n b_n = A_M b_M - A_{N+1} b_N - \sum_{n=M+1}^{N} A_n (b_{n-1} - b_n).$$

Dim. La verifica è elementare:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=M}^{N} a_n b_n &= \sum_{n=M}^{N} (A_n - A_{n+1}) b_n \\
&= \sum_{n=M}^{N} A_n b_n - \sum_{n=M}^{N} A_{n+1} b_n = \sum_{n=M}^{N} A_n b_n - \sum_{n=M+1}^{N+1} A_n b_{n-1} \\
&= A_M b_M - A_{N+1} b_N + \sum_{n=M+1}^{N} A_n (b_n - b_{n-1}).
\end{aligned}$$

□

Teorema 2.2 (Criterio di Abel–Dirichlet). Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione reale o complessa tale che converga la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, e sia $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di funzioni a valori reali o complessi definite su un insieme X. Supponiamo che:

$$C = \sup_{n\in\mathbb{N}} \|f_n\|_\infty < \infty \quad \text{e} \quad D = \sup_{x\in X} \sum_{n=1}^{\infty} |f_{n+1}(x) - f_n(x)| < \infty.$$

Allora la serie di funzioni $\sum_{n=1}^{\infty} a_n f_n(x)$ converge uniformemente su X.

Dim. Poniamo $A_n = \sum_{k=n}^{\infty} a_k$ cosicchè $\lim_{n\to\infty} A_n = 0$, per la convergenza della serie. Dati $n, p \in \mathbb{N}$, usando la formula di somma per parti si trova

$$\sum_{k=n}^{n+p} a_k f_k(x) = A_n f_n(x) - A_{n+p+1} f_{n+p}(x) + \sum_{k=n+1}^{n+p} A_k \big(f_k(x) - f_{k-1}(x)\big).$$

Fissato $\varepsilon > 0$ esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che per $n \geq \bar{n}$ si ha $|A_n| \leq \varepsilon$ e quindi per ogni $p \in \mathbb{N}$ si ottiene

$$\sup_{x\in X} \Big| \sum_{k=n}^{n+p} a_k f_k(x) \Big| \leq \varepsilon(2C + D).$$

Poichè la successione delle somme parziali della serie in esame è uniformemente di Cauchy su X, la serie converge uniformemente su X. □

Esempio 2.3 (Criterio di Abel). Se la serie di potenze complessa $\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ converge nel punto $z_0 \in \mathbb{C}$, allora converge uniformemente sul segmento $[0, z_0] = \{x z_0 \in \mathbb{C} : 0 \leq x \leq 1\}$.

Per $x \in [0, 1]$ si consideri la serie di funzioni

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n z_0^n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n f_n(x), \qquad a_n = b_n z_0^n, \quad f_n(x) = x^n.$$

La successione di funzioni $f_n(x) = x^n$ è uniformemente limitata su $[0, 1]$ e inoltre

$$\sum_{n=0}^{\infty} |f_{n+1}(x) - f_n(x)| = \sum_{n=0}^{\infty} (1 - x)x^n = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in [0, 1) \\ 0 & \text{se } x = 1. \end{cases}$$

La convergenza uniforme sul segmento segue dal Teorema 2.2.

3. Convergenza uniforme e differenziabilità

Nel seguente teorema proveremo che se una successione di funzioni derivabili converge in un punto e le derivate convergono uniformemente, allora la successione converge uniformemente.

Teorema 3.1. Sia $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, una successione di funzioni derivabili. Supponiamo che:

i) Esista $x_0 \in [0, 1]$ tale che la successione $\big(f_n(x_0)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
ii) La successione di funzioni $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente ad una funzione $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$.

Allora la successione $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente su $[0, 1]$ ad una funzione $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, f è derivabile ed $f'(x) = g(x)$ per ogni $x \in [0, 1]$.

Dim. Proviamo innanzi tutto che la successione $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente. Sarà sufficiente verificare che la successione è uniformemente di Cauchy. Dati $n, m \in \mathbb{N}$, per il Teorema di Lagrange per ogni $x \in [0, 1]$ esiste $\xi \in [x_0, x]$ tale che

$$f_n(x) - f_m(x) = f_n(x_0) - f_m(x_0) + \big(f_n'(\xi) - f_m'(\xi)\big)(x - x_0).$$

Dunque, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $n, m \geq \bar{n}$ si ha

$$\|f_n - f_m\|_\infty \leq |f_n(x_0) - f_m(x_0)| + \|f'_n - f'_m\|_\infty.$$

In conclusione, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente su $[0,1]$ ad una funzione $f \in C([0,1])$.

Sia ora $\bar{x} \in [0,1]$ un punto generico, e definiamo le funzioni $g_n : [0,1] \to \mathbb{R}$

$$g_n(x) = \begin{cases} \dfrac{f_n(x) - f_n(\bar{x})}{x - \bar{x}} & \text{se } x \neq \bar{x} \\ f'_n(\bar{x}) & \text{se } x = \bar{x}. \end{cases}$$

Per la derivabilità di ciascuna f_n, le funzioni g_n sono continue.

Proviamo che la successione $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è uniformemente di Cauchy. Per $x \neq \bar{x}$ abbiamo

$$g_n(x) - g_m(x) = \frac{f_n(x) - f_n(\bar{x}) - (f_m(x) - f_m(\bar{x}))}{x - \bar{x}} = \frac{h(x) - h(\bar{x})}{x - \bar{x}},$$

dove abbiamo posto $h = f_n - f_m$, che è continua su $[0,1]$ e derivabile per $x \neq \bar{x}$. Per il Teorema di Lagrange esiste $\xi \in [x, \bar{x}]$ tale che $h(x) - h(\bar{x}) = h'(\xi)(x - \bar{x})$, e dunque

$$g_n(x) - g_m(x) = h'(\xi) = f'_n(\xi) - f'_m(\xi).$$

Si deduce che $\|g_n - g_m\|_\infty \leq \|f'_n - f'_m\|_\infty$ e dunque $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è uniformemente di Cauchy dal momento che lo è $(f'_n)_{n\in\mathbb{N}}$. La conclusione è che la successione $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente.

Proviamo che f è derivabile e che $f' = g$. Per il Teorema sullo scambio dei limiti si ha

$$\lim_{n\to\infty} \lim_{x\to\bar{x}} \frac{f_n(x) - f_n(\bar{x})}{x - \bar{x}} = \lim_{x\to\bar{x}} \lim_{n\to\infty} \frac{f_n(x) - f_n(\bar{x})}{x - \bar{x}},$$

e dunque

$$\begin{aligned} g(\bar{x}) = \lim_{n\to\infty} f'_n(\bar{x}) &= \lim_{n\to\infty} \lim_{x\to\bar{x}} \frac{f_n(x) - f_n(\bar{x})}{x - \bar{x}} \\ &= \lim_{x\to\bar{x}} \lim_{n\to\infty} \frac{f_n(x) - f_n(\bar{x})}{x - \bar{x}} = \lim_{x\to\bar{x}} \frac{f(x) - f(\bar{x})}{x - \bar{x}} = f'(\bar{x}). \end{aligned}$$

□

Riassumiamo il Teorema 3.1 nel seguente corollario.

Corollario 3.2 (Scambio di derivata e limite). Sia $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di funzioni derivabili su $[0,1]$. Supponiamo che $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converga puntualmente e che $(f'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converga uniformemente. Allora, per ogni $x \in [0,1]$ si ha

$$\frac{d}{dx} \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{d}{dx} f_n(x).$$

Applicando il Teorema 3.1 alla successione delle somme parziali, si prova il seguente teorema sulla derivazione sotto segno di serie.

Teorema 3.3 (Scambio di derivata e somma). Sia $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, una successione di funzioni derivabili. Supponiamo che:

i) Esiste un punto $x_0 \in [0,1]$ tale che converga la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0)$;

ii) La serie delle derivate $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$ converge uniformemente su $[0,1]$.

Allora la serie di funzioni $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge uniformemente su $[0,1]$, definisce una funzione derivabile, ed inoltre

$$\frac{d}{dx}\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dx} f_n(x).$$

Osservazione 3.4. La scelta di lavorare sull'intervallo $[0,1]$ fatta in questa sezione è di pura comodità. I teoremi valgono per qualsiasi intervallo (limitato o illimitato, aperto o chiuso) di $\mathbb{R}$.

4. Convergenza uniforme e integrale di Riemann

Vedremo ora che con la convergenza uniforme è possibile portare il limite sotto segno di integrale. Il Teorema 4.1, tuttavia è di uso limitato. Teoremi di passaggio al limite sotto segno di integrale molto più efficienti sono: 1) il Teorema della convergenza dominata; 2) il Teorema della convergenza monotona (o di Beppo Levi). Questi teoremi richiedono la teoria dell'integrale di Lebesgue e verranno visti nella parte B del corso.

Teorema 4.1 (Scambio di limite e integrale). Sia $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, una successione di funzioni Riemann-integrabili e sia $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ una funzione. Se $f_n \to f$ uniformemente su $[0,1]$ per $n \to \infty$, allora f è Riemann-integrabile e inoltre

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx. \tag{4.2}$$

Dim. Proviamo preliminarmente che la funzione f è limitata. Infatti, fissato $\varepsilon > 0$, per la convergenza uniforme esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $n \geq \bar{n}$ si ha

$$\sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon,$$

e dunque per ogni $x \in [0,1]$ si ha

$$|f(x)| \leq |f_n(x) - f(x)| + |f_n(x)| \leq \varepsilon + \sup_{x\in[0,1]} |f_n(x)|.$$

Questo prova la limitatezza di f.

Proviamo ora che f è Riemann-integrabile. Sia $\varepsilon > 0$ fissato, e mostriamo che esiste una scomposizione $\sigma = \{0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_m = 1\}$ dell'intervallo $[0,1]$, per $m \in \mathbb{N}$ opportuno, tale che

$$S(f,\sigma) - s(f,\sigma) \leq \varepsilon,$$

dove

$$S(f,\sigma) = \sum_{i=1}^{m} |I_i| \sup_{x\in I_i} f(x) \quad \text{e} \quad s(f,\sigma) = \sum_{i=1}^{m} |I_i| \inf_{x\in I_i} f(x),$$

sono le somme superiori e inferiori di f relativamente a σ, $I_i = [x_{i-1}, x_i]$ e $|I_i| = x_i - x_{i-1}$.

Sia $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che $\sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| \le \varepsilon$ per ogni $n \ge \bar{n}$. Si ha allora

$$S(f,\sigma) \le \sum_{i=1}^m |I_i| \sup_{x\in I_i} (f(x) - f_n(x)) + \sum_{i=1}^m |I_i| \sup_{x\in I_i} f_n(x) \le \varepsilon + S(f_n,\sigma),$$

e analogamente

$$s(f,\sigma) = \sum_{i=1}^m |I_i| \inf_{x\in I_i} (f(x) - f_n(x)) + \sum_{i=1}^m |I_i| \inf_{x\in I_i} f_n(x) \ge -\varepsilon + s(f_n,\sigma).$$

Sottraendo membro a membro le due disuguaglianze si ottiene

$$S(f,\sigma) - s(f,\sigma) \le 2\varepsilon + S(f_n,\sigma) - s(f_n,\sigma).$$

Tale maggiorazione vale per una qualsiasi scomposizione σ e per ogni $n \ge \bar{n}$. Fissato un tale n, dal momento che f_n è Riemann-integrabile, possiamo scegliere la scomposizione σ in modo tale che $S(f_n,\sigma) - s(f_n,\sigma) \le \varepsilon$, e quindi

$$S(f,\sigma) - s(f,\sigma) \le 3\varepsilon.$$

Questo prova l'integrabilità di f.

Per provare la (4.2) è sufficiente osservare che fissato $\varepsilon > 0$ per $n \ge \bar{n}$ si ha

$$\Big| \int_0^1 f_n(x)dx - \int_0^1 f(x)dx \Big| = \Big| \int_0^1 (f_n(x) - f(x))dx \Big| \le \int_0^1 |f_n(x) - f(x)|dx \le \varepsilon.$$

□

5. Esercizi

5.1. Convergenza uniforme.

Esercizio 1. Costruire funzioni $f, f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, tali che:
1) $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$;
2) per ogni $-\infty \le a < b \le \infty$ la convergenza al punto 1) non è uniforme su (a,b).

Esercizio 2. Mostrare tramite esempi che ciascuna delle tre ipotesi: a) K compatto; b) f continua; e c) f_n continua per ogni $n \in \mathbb{N}$ è necessaria per la validità del Teorema 1.5.

Esercizio 3. Sia $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, una successione di funzioni periodiche, ciascuna di periodo $T_n > 0$, tali che:
1) ogni f_n è continua;
2) $\sup_{n\in\mathbb{N}} T_n < \infty$;
3) $f_n \to f$ uniformemente su $\mathbb{R}$, per $n \to \infty$.

Provare che f è periodica.

Esercizio 4. a) La tesi nell'Esercizio 3 rimane valida anche solo con la convergenza puntuale invece che uniforme in 3). Provare questa affermazione o dare un controesempio.

b) La tesi nell'Esercizio 3 rimane valida anche senza l'ipotesi 2). Provare questa affermazione o dare un controesempio.

c) La tesi nell'Esercizio 3 rimane valida anche senza l'ipotesi 1). Provare questa affermazione o dare un controesempio.

Esercizio 5. Sappiamo che per ogni $x \in \mathbb{R}$ si ha la convergenza puntuale

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \mathrm{e}^x.$$

Discutere la convergenza uniforme in tale limite.

Esercizio 6. Al variare di $x > 0$ studiare la convergenza puntuale e uniforme della serie

$$\sum_{n=0}^{\infty}(1-\log x)\log^n x,$$

e calcolarne la somma.

Esercizio 7. Al variare di $x \in \mathbb{R}$ studiare la convergenza puntuale e uniforme della serie di funzioni

$$\sum_{n=0}^{\infty}\mathrm{e}^{nx^2-n^2x}.$$

Esercizio 8. Studiare la convergenza puntuale e uniforme su opportuni sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ della successione di funzioni $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ così definita

$$f_n(x) = \frac{1+x^n}{n+x^{2n}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Esercizio 9. Sia X uno spazio metrico compatto, e siano $f, f_n \in C(X;\mathbb{R})$, $n \in \mathbb{N}$. Diciamo che la successione di funzioni $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge continuamente (o in modo continuo) ad f su X se per ogni successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ di X convergente ad $x \in X$ si ha $\lim_{n\to\infty} f_n(x_n) = f(x)$. Dimostrare che $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge continuamente ad f su X se e solo se converge uniformemente ad f su X.

5.2. Convergenza uniforme e derivabilità.

Esercizio 10. Sia $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, la successione di funzioni

$$f_n(x) = \frac{1}{n}\log(1+\mathrm{e}^{nx}), \quad x \in \mathbb{R}.$$

i) Studiare la convergenza puntuale e uniforme della successione $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
ii) Studiare la convergenza puntuale e uniforme della successione delle derivate $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$.

Esercizio 11. Sia $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, la successione di funzioni

$$f_n(x) = \sqrt[n]{1+x^{2n}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

i) Studiare la convergenza puntuale e uniforme della successione $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
ii) Studiare la convergenza puntuale e uniforme della successione delle derivate $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$.

Esercizio 12. Sia $f : (-R, R) \to \mathbb{R}$ la funzione

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad x \in (-R, R),$$

dove $0 < R \leq \infty$ è il raggio di convergenza della serie di potenze. Provare che $f \in C^\infty(-R, R)$. Verificare inoltre che

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Esercizio 13. Per ogni $x \in (-1,1)$ calcolare la somma della serie

$$\sum_{n=1}^\infty n^2 x^n.$$

Esercizio 14. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione

$$f(x) = \sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^n}{2\sqrt{n} + \cos x}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Provare che $f \in C^\infty(\mathbb{R})$.

Esercizio 15. Si consideri la successione di funzioni $f_n : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$,

$$f_n(x) = \frac{(x^2-1)^n}{n}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

i) Provare che la serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^\infty f_n(x)$$

converge uniformemente per $x \in [-1,1]$.

ii) Provare che la serie delle derivate

$$\sum_{n=1}^\infty f_n'(x)$$

converge per ogni $x \in [-1,1]$, ma non converge uniformemente su $[-1,1]$.

iii) Verificare che

$$\frac{d}{dx} \sum_{n=1}^\infty f_n(x) = \sum_{n=1}^\infty \frac{d}{dx} f_n(x)$$

per ogni $x \in [-1,1]$, ed in particolare per $x = 0$.

5.3. Convergenza uniforme e integrale.

Esercizio 16. Costruire una funzione $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ tale che:

1) f è Riemann-integrabile.

2) Detto $A = \big\{x \in [0,1] : \ f \text{ non è continua in } x\big\}$ l'insieme dei punti di discontinuità di f, si ha $\bar{A} = [0,1]$.

Esercizio 17. Studiare la convergenza puntuale e uniforme della successione di funzioni

$$f_n(x) = \Big(\frac{1}{n} + \sin^2 x\Big)^n, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Calcolare quindi il limite

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^\pi f_n(x)\, dx.$$

Esercizio 18. i) Provare che

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 (1-t^2)^n dt = 0.$$

ii) Si consideri la successione di funzioni $f_n : [-1,1] \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$,

$$f_n(x) = \frac{\displaystyle\int_0^x (1-t^2)^n dt}{\displaystyle\int_0^1 (1-t^2)^n dt}, \quad x \in [-1,1].$$

Calcolare il limite puntuale

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x), \quad x \in [-1,1],$$

e discutere la convergenza uniforme.

Esercizio 19. Per ogni $x \in [-1,1)$ calcolare la somma della serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2n+1}.$$

Esercizio 20. Si consideri la successione di funzioni $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$,

$$f_n(x) = \int_1^n \frac{n}{ny^2 + x^2} dy, \quad x \in \mathbb{R}.$$

i) Calcolare il limite puntuale

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

ii) Studiare la convergenza uniforme nel limite precedente.

CAPITOLO 3

Spazi metrici. Continuazione

1. Spazi di Banach di dimensione finita

Sia $(V, \|\cdot\|_V)$ uno spazio normato reale di dimensione finita $n \geq 1$. Fissiamo una base $\mathrm{v}_1, \ldots, \mathrm{v}_n$ di V. La trasformazione $\varphi : \mathbb{R}^n \to V$

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^n x_i \mathrm{v}_i, \quad x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n,$$

è un isomorfismo vettoriale. Definiamo su $\mathbb{R}^n$ la norma

$$\|x\| = \|\varphi(x)\|_V, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Verificare che $\|\cdot\|$ sia una norma su $\mathbb{R}^n$ è un facile esercizio. Gli spazi normati $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ e $(V, \|\cdot\|_V)$ sono isomorfi come spazi vettoriali e isometrici, con isometria φ, come spazi metrici. Nel seguito, non è dunque restrittivo limitare la discussione ad $\mathbb{R}^n$.

Proposizione 1.1. Due norme $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_2$ su $\mathbb{R}^n$ sono equivalenti. Ovvero, esistono due costanti $0 < C_1 \leq C_2 < \infty$ tali che per ogni $x \in \mathbb{R}^n$ si ha

$$C_1\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq C_2\|x\|_1. \tag{1.3}$$

Dim. Senza perdere di generalità, possiamo supporre che

$$\|x\|_1 = |x| = \Big(\sum_{i=1}^n x_i^2\Big)^{1/2}, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Affermiamo che la funzione $f : \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$, $f(x) = \|x\|_2$, è continua rispetto alla distanza standard di $\mathbb{R}^n$. Infatti, dalla subadditività della norma segue segue

$$|f(x+h) - f(x)| = \big|\|x+h\|_2 - \|x\|_2\big| \leq \|h\|_2, \quad x, h \in \mathbb{R}^n.$$

D'altra parte, indicando con $\mathrm{e}_1, \ldots, \mathrm{e}_n$ la base canonica di $\mathbb{R}^n$, si ha

$$\|h\|_2 = \Big\|\sum_{i=1}^n h_i \mathrm{e}_i\Big\|_2 \leq \sum_{i=1}^n |h_i| \|\mathrm{e}_i\|_2 \leq M \sum_{i=1}^n |h_i|,$$

con $M = \max\{\|\mathrm{e}_1\|_2, \ldots, \|\mathrm{e}_n\|_2\}$. Dunque, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che $|h| < \delta$ implica $\|h\|_2 < \varepsilon$, e quindi anche $|f(x+h) - f(x)| < \varepsilon$. In effetti abbiamo provato che f è uniformemente continua.

La sfera unitaria $K = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\}$ è un insieme compatto, e quindi per il Teorema di Weierstrass la funzione $f : K \to [0, \infty)$ ammette massimo e minimo: esistono $y, z \in K$ tali che

$$0 < C_1 = \|y\|_2 \leq \|x\|_2 \leq \|z\|_2 = C_2 < \infty, \quad x \in K.$$

La disuguaglianza generele (1.3) segue per omogeneità. $\square$

Esempio 1.2 (Norme $\|\cdot\|_p$). Per $p \geq 1$ definiamo

$$\|x\|_p = \Big(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\Big)^{1/p}, \quad x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Quando $p = \infty$ definiamo

$$\|x\|_\infty = \max\{|x_1|, \dots, |x_n|\}, \quad x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Lo spazio $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_p)$ è normato. Proviamo la proprietà più impegnativa da verificare, la subadditività.

Siano $1 \leq p, q \leq \infty$ tali che $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Le norme $\|\cdot\|_p$ e $\|\cdot\|_q$ verificano la seguente disuguaglianza di Minkowski:

$$\langle x, y\rangle \leq \|x\|_p \|y\|_q, \quad x, y \in \mathbb{R}^n. \tag{1.4}$$

che vale anche nel caso $p = 1$ e $q = \infty$. Si tratta di una generalizzazione della disuguaglianza di Cauchy-Schwarz. Per provare la disuguaglianza (1.4) si seguano le indicazioni dell'Esercizio 23.

Veniamo alla subadditività. Per $x, y \in \mathbb{R}^n$ si ha

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^p &= \sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^{p-1}|x_i + y_i| \leq \sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^{p-1}(|x_i| + |y_i|) \\
&= \sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^{p-1}|x_i| + \sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^{p-1}|y_i| \\
&\leq \|x\|_p \Big(\sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^{(p-1)q}\Big)^{1/q} + \|y\|_q \Big(\sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^{(p-1)q}\Big)^{1/q} \\
&= (\|x\|_p + \|y\|_q)\Big(\sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^p\Big)^{1/q}.
\end{aligned}$$

Riordinando la disuguaglianza ottenuta si trova

$$\|x + y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p, \quad x, y \in \mathbb{R}^n.$$

2. Alcuni spazi funzionali

2.1. Funzioni continue su un compatto. Proviamo che lo spazio delle funzioni continue su un compatto munito della sup-norma è uno spazio di Banach.

Teorema 2.1. *Sia (K, d) uno spazio metrico compatto. Lo spazio $X = C(K)$ con la norma della convergenza uniforme:*

$$\|f\|_\infty = \max_{x\in K} |f(x)|$$

è uno spazio di Banach.

Dim. Sia $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di Cauchy in X. Per ogni $x \in K$ fissato, la successione $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione di Cauchy in $\mathbb{R}$ e quindi è convergente. Esiste un numero $f(x) \in \mathbb{R}$ tale che $f_n(x) \to f(x)$ per $n \to \infty$ e risulta così definita una funzione $f : K \to \mathbb{R}$. Proviamo che:

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0. \tag{2.5}$$

Per ogni $\varepsilon > 0$ fissato, esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $x \in K$ vale

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon \quad \text{per } m, n \geq \bar{n}.$$

Facendo tendere $m \to \infty$ e usando la convergenza $f_m(x) \to f(x)$ per $m \to \infty$ si ottiene, per ogni $x \in K$,

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \text{per } m, n \geq \bar{n}.$$

Questo prova l'affermazione (2.5).

Per il Teorema 1.3, $f : K \to \mathbb{R}$ è continua, ovvero $f \in X$.

$\square$

2.2. Lo spazio $C^1([0,1])$. Lo spazio vettoriale

$$C^1([0,1]) = \big\{ f : [0,1] \to \mathbb{R} \,|\, f \text{ è derivabile con continuità su } [0,1] \big\}.$$

munito della norma

$$\|f\|_{C^1([0,1])} = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$$

è uno spazio di Banach. Si veda l'Esercizio 24. In effetti, anche

$$\|f\|_* = |f(0)| + \|f'\|_\infty,$$

è una norma su $C^1([0,1])$ che lo rende completo. Tale norma è equivalente alla precedente.

2.3. Esempio di spazio non completo. Consideriamo lo spazio vettoriale $X = C([0,1])$ delle funzioni continue a valori reali definite sull'intervallo $[0,1] \subset \mathbb{R}$. La funzione $\|\cdot\|_1 : X \to [0,\infty)$

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)|dx$$

è una norma, detta *norma della convergenza* $L^1([0,1])$. La verifica delle proprietà della norma è elementare. Ad esempio, la subadditività della norma $\|\cdot\|_1$ segue dalla subadditività del valore assoluto e dalla monotonia dell'integrale. Precisamente, per $f, g \in X$ si ha

$$\|f+g\|_1 = \int_0^1 |f(x)+g(x)|dx \leq \int_0^1 \big(|f(x)|+|g(x)|\big)dx = \int_0^1 |f(x)|dx + \int_0^1 |g(x)|dx.$$

La palla centrata nella funzione nulla $f = 0$

$$B_r(0) = \Big\{ g \in C([0,1]) : \int_0^1 |g(x)|dx < r \Big\}$$

è l'insieme delle funzioni continue g con integrale di $|g|$ minore di $r > 0$.

La distanza fra due funzioni $f, g \in X$ è

$$d(f,g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)|dx.$$

Proviamo che (X,d) non è uno spazio metrico completo.

Per $n \in \mathbb{N}$ sia $f_n \in C([0,1])$ la funzione così definita

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & x \in [0,1/2] \\ n(x-1/2) & x \in [1/2, 1/2+1/n] \\ 1 & x \in [1/2+1/n, 1]. \end{cases}$$

La successione $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è di Cauchy. Infatti, dati $m, n \in \mathbb{N}$ con $m \geq n$ risulta

$$d(f_m, f_n) = \int_0^1 |f_n - f_m| dx \leq \int_{1/2}^{1/2+1/n} (|f_n| + |f_m|) dx \leq \frac{2}{n}.$$

La candidata funzione limite è la funzione

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in [0,1/2] \\ 1 & x \in (1/2, 1]. \end{cases}$$

In effetti, la funzione f è Riemann-integrabile su $[0,1]$ e risulta

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 |f_n(x) - f(x)| dx = 0,$$

ma f non è in $C([0,1])$ perchè ha un punto di discontinuità. Dunque la successione $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ non converge ad un elemento di X.

D'altra parte, sappiamo che ogni spazio metrico ammette un completamento, e ci si può dunque chiedere qual è il completamento di $(C([0,1]), \|\cdot\|_1)$. Per rispondere occorre sviluppare la teoria dell'integrale di Lebesgue (seconda parte del corso). Il completamento è l'insieme delle funzioni Lebesgue-integrabili su $[0,1]$.

2.4. Funzioni Lipschitziane. Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ un insieme. Per ogni funzione $f : A \to \mathbb{R}$ definiamo

$$\mathrm{Lip}(f) = \inf\Big\{L > 0 : \frac{|f(x) - f(y)|}{|x-y|} \leq L, \quad x, y \in A,\, x \neq y\Big\},$$

e diciamo che f è Lipschitziana su A se $\mathrm{Lip}(f) < \infty$. Posto $L = \mathrm{Lip}(f)$ avremo allora

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x-y|, \quad x, y \in A.$$

Dunque, le funzioni Lipschitziane sono uniformemente continue.

L'insieme $\mathrm{Lip}(A)$ delle funzioni Lipschitziane su A a valori in $\mathbb{R}^m$ è un sottospazio vattoriale di $C(A)$.

Un corollario del Teorema di Ascoli-Arzelà è il seguente fatto. Supponiamo che $A \subset \mathbb{R}^n$ sia compatto. Allora l'insieme

$$\big\{f \in C(A) : \|f\|_\infty \leq 1 \text{ e } \mathrm{Lip}(f) \leq 1\big\}$$

è un sottoinsieme *compatto* di $C(A)$ munito della norma della convergenza uniforme.

3. Teoremi di punto fisso

Sia X un insieme e sia $T : X \to X$ una funzione da X in se stesso. Siamo interessati all'esistenza di soluzioni $x \in X$ dell'equazione $T(x) = x$. Un simile elemento $x \in X$ si dice *punto fisso* di T.

3.1. Teorema delle contrazioni.

Definizione 3.1 (Contrazione). Sia (X, d) uno spazio metrico. Un'applicazione $T : X \to X$ è una *contrazione* se esiste un numero $0 < \lambda < 1$ tale che $d(T(x), T(y)) \leq \lambda d(x, y)$ per ogni $x, y \in X$.

Le contrazioni sono Lipschitziane e dunque uniformemente continue.

Teorema 3.2 (Banach). Sia (X, d) uno spazio metrico completo e sia $T : X \to X$ una contrazione. Allora esiste un unico punto $x \in X$ tale che $x = T(x)$.

Dim. Sia $x_0 \in X$ un qualsiasi punto e si definisca la successione $x_n = T^n(x_0) = T \circ \ldots \circ T(x_0)$, n-volte. Proviamo che la successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è di Cauchy. Infatti, per la disuguaglianza triangolare si ha per ogni $n, k \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} d(x_{n+k}, x_n) &\leq \sum_{h=1}^{k} d(x_{n+h}, x_{n+h-1}) = \sum_{h=1}^{k} d(T^{n+h}(x_0), T^{n+h-1}(x_0)) \\ &\leq d(T(x_0), x_0) \sum_{h=1}^{k} \lambda^{n+h-1} \leq \lambda^n d(T(x_0), x_0) \sum_{h=1}^{\infty} \lambda^{h-1}. \end{aligned}$$

La serie converge e $\lambda^n \to 0$ per $n \to \infty$, dal momento che $\lambda < 1$. Poichè X è completo, esiste un punto $x \in X$ tale che $x = \lim_{n\to\infty} T^n(x_0)$.

Proviamo che $x = T(x)$. La funzione $T : X \to X$ è continua e quindi abbiamo

$$x = \lim_{n\to\infty} T^n(x_0) = \lim_{n\to\infty} T(T^{n-1}(x_0)) = T(\lim_{n\to\infty} T^{n-1}(x_0)) = T(x).$$

Proviamo infine che il punto fisso è unico. Sia $\bar{x} \in X$ tale che $\bar{x} = T(\bar{x})$. Allora abbiamo

$$d(x, \bar{x}) = d(T(x), T(\bar{x})) \leq \lambda d(x, \bar{x}) \quad \Rightarrow \quad d(x, \bar{x}) = 0,$$

perchè $\lambda < 1$, e quindi $x = \bar{x}$.

□

La dimostrazione del Teorema di Banach è costruttiva e può essere implementata in un calcolatore.

Teorema 3.3. Sia (X, d) uno spazio metrico completo e sia $T : X \to X$ un'applicazione tale che per qualche $n \in \mathbb{N}$ l'iterazione T^n è una contrazione. Allora esiste un unico $x \in X$ tale che $x = T(x)$.

Dim. Per il Teorema di Banach esiste un unico $x \in X$ tale che $T^n(x) = x$. Allora, per qualche $0 \leq \lambda < 1$, si ha

$$d(x, T(x)) = d(T^n(x), T(T^n(x))) = d(T^n(x), T^n(T(x))) \leq \lambda d(x, T(x)),$$

e quindi $d(x, T(x)) = 0$, che è equivalente a $T(x) = x$.

Supponiamo che esista un secondo punto fisso $y \in X$, con $y = T(y)$. Allora si ha anche $y = T^n(y)$ e pertanto $x = y$, dall'unicità del punto fisso di T^n.

□

3.2. Teoremi di Brouwer e di Schauder.

TEOREMA 3.4 (Brouwer). Sia $K \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, una palla chiusa in e sia $T : K \to K$ continua. Allora esiste $x \in K$ tale che $T(x) = x$.

In questi casi, il punto fisso tipicamente non è unico. Per $n = 1$ il teorema precedente ha una dimostrazione elementare. Per $n = 2$, la dimostrazione migliore è si basa sulla nozione di omotopia. Per $n \geq 3$, esistono dimostrazioni basate sull'omologia. Per una dimostrazione analitica, si veda Evans, *Partial Differential Equations*, p.441. Il Teorema di Brouwer si estende alla dimensione infinita.

TEOREMA 3.5 (Schauder). Sia $(X, \|\cdot\|)$ uno spazio di Banach e sia $K \subset X$ un insieme non-vuoto, chiuso e convesso. Sia $T : K \to K$ un'applicazione tale che:

i) T è continua;
ii) $\overline{T(K)} \subset K$ è compatto.

Allora esiste $x \in K$ tale che $T(x) = x$.

Per una dimostrazione, si veda Evans, *Partial Differential Equations*, p.502.

4. Trasformazioni lineari e continue

Siano $(X, \|\cdot\|_X)$ e $(Y, \|\cdot\|_Y)$ due spazi normati reali. Per ogni trasformazione (operatore) lineare $T : X \to Y$ definiamo

$$\|T\| = \sup_{\|x\|_X \leq 1} \|Tx\|_Y.$$

Se $\|T\| < \infty$ diremo che T è una trasformazione *limitata* e chiameremo $\|T\|$ la *norma* di T. Indichiamo con

$$\mathcal{L}(X, Y) = \big\{T : X \to Y \,|\, \text{lineare e limitata}\big\},$$

l'insieme delle trasformazioni lineari e limitate da X a Y. Con le naturali operazioni di somma fra applicazioni e di moltiplicazione per uno scalare, $\mathcal{L}(X, Y)$ è uno spazio vettoriale reale. Osserviamo che dalla definizione di $\|T\|$ segue immediatamente la disuguaglianza

$$\|Tx\|_Y \leq \|T\|\|x\|_X, \quad x \in X. \tag{4.6}$$

Proviamo che $\|\cdot\|$ è una norma:

i) Se $T = 0$ è l'applicazione nulla, allora $\|T\| = 0$. Se viceversa $\|T\| = 0$ allora dalla (4.6) segue che $\|Tx\|_Y = 0$ per ogni $x \in X$, e quindi $T = 0$.
ii) Per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ si ha

$$\|\lambda T\| = \sup_{\|x\|_X \leq 1} \|(\lambda T)x\|_Y = \sup_{\|x\|_X \leq 1} \|\lambda(Tx)\|_Y = |\lambda| \sup_{\|x\|_X \leq 1} \|Tx\|_Y = |\lambda|\|T\|.$$

iii) Infine verifichiamo la subadditività. Se $T, S \in \mathcal{L}(X, Y)$ allora

$$\begin{aligned}\|T + S\| &= \sup_{\|x\|_X \leq 1} \|(S + T)x\|_Y = \sup_{\|x\|_X \leq 1} \|Sx + Tx\|_Y \\ &\leq \sup_{\|x\|_X \leq 1} \|Sx\|_Y + \|Tx\|_Y \leq \|S\| + \|T\|.\end{aligned}$$

PROPOSIZIONE 4.1. Sia $T : X \to Y$ lineare. Sono equivalenti le seguenti affermazioni:

A) T è limitata;
B) T è continua in 0;
C) T è continua da X a Y.

Dim. A)⇒C). Se T è limitata, allora per ogni punto $x_0 \in X$ si ha

$$\|Tx - Tx_0\|_Y = \|T(x - x_0)\|_Y \leq \|T\|\|x - x_0\|_X,$$

e quindi T è continua in x_0. In effetti, T è Lipschitziana.

C)⇒B) è banale. Proviamo che B)⇒A). Se T è continua in 0 allora per ogni $\varepsilon > 0$ (ad esempio per $\varepsilon = 1$) esiste $\delta > 0$ tale che

$$\|x\|_X \leq \delta \quad \Rightarrow \quad \|Tx\|_Y \leq \varepsilon = 1.$$

Dunque, se $\|x\|_X \leq 1$ si ha $\delta\|Tx\|_Y = \|T(\delta x)\|_Y \leq 1$, da cui $\|Tx\|_Y \leq 1/\delta$. Segue che $\|T\| \leq 1/\delta < \infty$.

□

Osservazione 4.2. Alla luce della proposizione precedente, possiamo equivalentemente definire

$$\mathcal{L}(X,Y) = \big\{T : X \to Y \,|\, \text{lineare e continua}\big\}.$$

Osservazione 4.3. Se X e Y sono di dimensione finita, allora la linearità implica automaticamente la continuità. Questo segue dal fatto che una trasformazione lineare $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ è della forma

$$T(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i,$$

per opportuni $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$, ovvero è un polinomio omogeneo di grado 1.

Qundo X oppure Y (oppure entrambi) non sono di dimensione finita, allora la linearità non implica la limitatezza (Esercizio 35).

Esempio 4.4. Sia $X = C([0,1])$ munito della sup-norma e sia $Y = \mathbb{R}$. La trasformazione $T : X \to \mathbb{R}$

$$T(f) = \int_0^1 f(t)dt$$

è lineare, in quanto l'integrale di Riemann è lineare. Inoltre, T è ovviamente anche limitato

$$|T(f)| = \Big|\int_0^1 f(t)dt\Big| \leq \int_0^1 |f(t)|\,dt \leq \|f\|_\infty,$$

e dunque è continuo, $T \in \mathcal{L}(X, \mathbb{R}) = X^*$, dove con X^* si indica il duale di X.

Gli argomenti di questa sezione e della precedente sono il punto di partenza del corso di *Analisi funzionale.*

5. Caratterizzazione degli spazi metrici compatti

Proposizione 5.1. Sia (X,d) uno spazio metrico completo e siano $K_n \subset X$, $n \in \mathbb{N}$, insiemi chiusi non vuoti tali che $K_{n+1} \subset K_n$ e $\mathrm{diam}(K_n) \to 0$ per $n \to \infty$. Allora esiste $x \in X$ tale che

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n = \{x\}.$$

Dim. Selezioniamo punti $x_n \in K_n \neq \emptyset$, $n \in \mathbb{N}$, a nostro piacere. La successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ di di Cauchy, infatti se $m \geq n$ allora $x_n, x_m \in K_n$ e dunque

$$d(x_m, x_n) \leq \mathrm{diam}(K_n) < \varepsilon$$

per ogni $n \in \mathbb{N}$ sufficientemente grande. Per la completezza di X, esiste $x \in X$ tale che $x_n \to x$ per $n \to \infty$. Siccome $x_m \in K_n$ per ogni $m \geq n$, dalla caratterizzazione sequenziale della chiusura di K_n segue che $x \in K_n$, per ogni $n \in \mathbb{N}$ e dunque

$$x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} K_n.$$

Se, poi, y è un altro punto nell'interesezione, allora $x, y \in K_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e dunque $d(x, y) \leq \mathrm{diam}(K_n)$. Deve dunque esssere $d(x, y) = 0$, ovvero $x = y$.

□

Ricordiamo la definizione di spazio metrico totalmente limitato.

Definizione 5.2 (Totale limitatezza). Uno spazio metrico (X, d) si dice *totalmente limitato* se per ogni $r > 0$ esistono $x_1, \ldots, x_n \in X$, $n \in \mathbb{N}$, tali che $X = \bigcup_{i=1}^{n} B_r(x_i)$.

Teorema 5.3. Sia (X, d) uno spazio metrico. Sono equivalenti le seguenti affermazioni:

i) X è compatto.
ii) Ogni insieme $A \subset X$ con $\mathrm{Card}(A) = \infty$ ha un punto di accumulazione.
iii) X è sequenzialmente compatto.
iv) X è completo e totalmente limitato.

Dim. i) ⇒ ii). Sia X compatto e sia $A \subset X$ un sottoinsieme con cardinalità $\mathrm{Card}(A) = \infty$. Supponiamo per assurdo che A non abbia punti di accumulazione. Allora per ogni $x \in X$ esiste $r_x > 0$ tale che

$$B_{r_x}(x) \setminus \{x\} \cap A = \emptyset.$$

Dal momento che $X = \bigcup_{x\in X} B_{r_x}(x)$ è un ricoprimento aperto, dalla compattezza di X segue che esistono finiti punti $x_1, \ldots, x_n \in X$ tali che $X = \bigcup_{i=1}^{n} B_{r_{x_i}}(x_i)$. Da ciò segue che

$$A = A \cap X = \bigcup_{i=1}^{n} A \cap B_{r_{x_i}}(x_i) \subset \bigcup_{i=1}^{n} \{x_i\},$$

ed A è un insieme finito. Questo è assurdo.

ii) ⇒ iii). Sia $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione in X. Se la cardinalità dell'insieme $A = \{x_n \in X : n \in \mathbb{N}\}$ è finita allora la successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ha una sottosuccessione costante. Se la cardinalità di A non è finita, allora esiste $x \in X$ punto di accumulazione di A. Allora per ogni $k \in \mathbb{N}$ esiste $n_k \in \mathbb{N}$ tale che $x_{n_k} \in B_{1/k}(x)$. Inoltre, la scelta di n_k può essere fatta in modo tale da avere una selezione crescente di indici $k \mapsto n_k$. La sottosuccesione $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ converge ad x.

iii) $\Rightarrow$ iv). Proviamo che X è completo. Sia $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di Cauchy. Per ipotesi esiste una sottosuccessione $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ che converge ad un punto $x \in X$. Ma allora, fissato $\varepsilon > 0$ esistono $\bar{n}, \bar{k} \in \mathbb{N}$ tali che

$$d(x, x_n) \leq d(x, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, x_n) \leq 2\varepsilon$$

non appena $k \geq \bar{k}$ e $n, n_k \geq \bar{n}$. Questo prova che $x_n \to x$ in X per $n \to \infty$.

Proviamo che X è totalmente limitato. Supponiamo per assurdo che esista $r > 0$ tale che non ci sia un ricoprimento finito di X con palle di raggio r.

Prendiamo $x_1 \in X$, $x_2 \in X \setminus B_r(x_1)$ e per induzione $x_n \in X \setminus \bigcup_{i=1}^{n-1} B_r(x_i)$. La successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ verifica $d(x_n, x_m) \geq r$ per ogni $n \neq m$, e dunque non può avere sottosuccessioni convergenti.

iv) $\Rightarrow$ i). Questa è la parte più significativa della dimostrazione.

Supponiamo per assurdo che X non sia compatto. Allora c'è un ricoprimento aperto di X, sia esso $\{A_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$, che non ha alcun sottoricoprimento finito.

Per la totale limitatezza, esistono palle $B_1^1, \dots, B_{n_1}^1$ di raggio 1 tali che $X = \bigcup_{i=1}^{n_1} B_i^1$. Senza perdere di generalità possiamo supporre qui e nel seguito che le palle siano chiuse. In particolare, esiste una palla $B_{i_1}^1$, $1 \leq i_1 \leq n_1$, che non è ricoperta da un numero finito di aperti A_α. L'insieme $B_{i_1}^1$ è totalmente limitato, e quindi esistono palle $B_1^2, \dots, B_{n_2}^2$ relative a $B_{i_1}^1$ di raggio $1/2$ tali che $B_{i_1}^1 \subset \bigcup_{i=1}^{n_2} B_i^2$. Esiste un insieme $B_{i_2}^2$ che non può essere ricoperto da un numero finito di insiemi aperti A_α.

Ora procediamo per induzione. Per ogni $k \in \mathbb{N}$ esiste una palla chiusa $B_{i_k}^k$ relativa a $B_{i_{k-1}}^{k-1}$, con raggio $1/k$ che non può essere ricoperta con un numero finito di insiemi aperti A_α.

Poichè X è completo, la successione decrescente di insiemi chiusi $(B_{i_k}^k)_{k\in\mathbb{N}}$ ha intersezione non vuota. Dunque esiste $x \in \bigcap_{k=1}^\infty B_{i_k}^k$. D'altra parte, $x \in A_\alpha$ per qualche $\alpha \in \mathcal{A}$ ed esiste dunque $r > 0$ tale che $B_r(x) \subset A_\alpha$. Se ora $k \in \mathbb{N}$ è tale che $1/k < r/2$ allora $B_{i_k}^k \subset B_r(x) \subset A_\alpha$. Questa è una contraddizione, perchè $B_{i_k}^k$ non può essere ricoperto da un numero finito di insiemi A_α. $\square$

6. Insiemi connessi

Questi argomenti verrano illustrati nel corso di Geometria 2, nel contesto degli spazi topologici.

Definizione 6.1 (Spazio connesso). Uno spazio metrico (X, d) si dice connesso se la scomposizione $X = A_1 \cup A_2$ con A_1, A_2 aperti tali che $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ implica che $A_1 = \emptyset$ oppure $A_2 = \emptyset$.

Se X non è connesso allora esistono due insiemi aperti disgiunti e non-vuoti A_1 e A_2 tali che $X = A_1 \cup A_2$. Quindi $A_1 = X \setminus A_2$ e $A_2 = X \setminus A_1$ sono contemporaneamente aperti e chiusi. Se X è connesso $\emptyset$ e X sono gli unici insiemi ad essere sia aperti che chiusi.

Sia (X, d) uno spazio metrico e sia $Y \subset X$ un suo sottoinsieme. Allora (Y, d) è ancora uno spazio metrico che avrà la sua topologia $\tau(Y)$, che si dice *topologia indotta* da X su Y o *topologia relativa*.

Esercizio 21. Sia $Y \subset X$ con la topologia relativa. Provare che un insieme $A \subset Y$ è aperto in Y se e solo se esiste un insieme aperto $B \subset X$ tale che $A = Y \cap B$.

Esempio 6.2. Sia $X = \mathbb{R}$ e $Y = [0,1]$. L'insieme $[0,1/2) \subset [0,1]$ è relativamente aperto in $[0,1]$ in quanto $[0,1/2) = [0,1] \cap (-\infty, 1/2)$.

Definizione 6.3. Sia (X,d) uno spazio metrico. Un sottoinsieme $Y \subset X$ si dice *connesso* se è connesso rispetto alla topologia indotta. Precisamente, se $Y = (Y \cap A_1) \cup (Y \cap A_2)$ con A_1, A_2 aperti di X e unione disgiunta, allora $Y \cap A_1 = \emptyset$ oppure $Y \cap A_2 = \emptyset$.

Esempio 6.4. Sia $\mathbb{R}$ munito della distanza Euclidea.

1) L'insieme $A \subset \mathbb{R}$, $A = [-2,-1] \cup [1,2]$ non è connesso in $\mathbb{R}$. Infatti la seguente unione è disgiunta:
$$A = (A \cap (-3,0)) \cup (A \cap (0,3)).$$
2) L'intervallo $I = [0,1] \subset \mathbb{R}$ è connesso. Proviamo questo fatto. Siano A_1, A_2 aperti di $\mathbb{R}$ tali che:
$$I = (I \cap A_1) \cup (I \cap A_2).$$
con unione disgiunta. Supponiamo ad esempio che $0 \in A_1$. Definiamo
$$\bar{x} = \sup \big\{ x \in [0,1] : [0,x) \subset I \cap A_1 \big\}.$$
Deve essere $0 < \bar{x} \le 1$. Se fosse $\bar{x} \in A_2$ allora $\bar{x} - \varepsilon \in I \cap A_2$ per qualche $\varepsilon > 0$ ma allora $I \cap A_1 \cap A_2 \neq \emptyset$. Questo non è possibile. Quindi $\bar{x} \in I \cap A_1$.
Se $\bar{x} < 1$ allora esiste $\delta > 0$ tale che $\bar{x} + \varepsilon \in A_1 \cap I$ per ogni $0 < \varepsilon < \delta$. Dunque $[\bar{x}, \delta) \subset A_1$ e questo contraddice la definizione di $\bar{x}$. Quindi $\bar{x} = 1$ e dunque $I \subset A_1$ e quindi $I \cap A_2 = \emptyset$. Altrimenti $(I \cap A_1) \cap (I \cap A_2) \neq \emptyset$.

Teorema 6.5. Siano (X, d_X) e (Y, d_Y) due spazi metrici e sia $f : X \to Y$ continua. Se X è connesso allora $f(X) \subset Y$ è connesso.

Dim. Siano $A_1, A_2 \subset Y$ insiemi aperti tali che
$$f(X) = (f(X) \cap A_1) \cup (f(X) \cap A_2)$$
con unione disgiunta. Allora
$$\begin{aligned} X = f^{-1}(f(X)) &= f^{-1}((f(X) \cap A_1) \cup (f(X) \cap A_2)) \\ &= f^{-1}(f(X) \cap A_1) \cup f^{-1}(f(X) \cap A_2)) \\ &= (X \cap f^{-1}(A_1)) \cup (X \cap f^{-1}(A_2)) = f^{-1}(A_1) \cup f^{-1}(A_2). \end{aligned}$$
L'ultima unione è disgiunta e gli insiemi $f^{-1}(A_1)$, $f^{-1}(A_2)$ sono aperti. Siccome X è connesso deve essere $f^{-1}(A_1) = \emptyset$ oppure $f^{-1}(A_2) = \emptyset$. Dunque, si ha $f(X) \cap A_1 = \emptyset$ oppure $f(X) \cap A_2 = \emptyset$.

$\square$

Definizione 6.6 (Spazio connesso per archi). Uno spazio metrico (X,d) si dice *connesso per archi* se per ogni coppia di punti $x, y \in X$ esiste una curva continua $\gamma : [0,1] \to X$ tale che $\gamma(0) = x$ e $\gamma(1) = y$.

Teorema 6.7. Se uno spazio metrico (X,d) è connesso per archi allora è connesso.

Dim. Supponiamo per assurdo che X non sia connesso. Allora esistono due aperti A_1, A_2 disgiunti e non vuoti tali che $X = A_1 \cup A_2$. Siano $x \in A_1$ e $y \in A_2$, e sia $\gamma : [0,1] \to X$ una curva continua tale che $\gamma(0) = x$ e $\gamma(1) = y$. Ma allora

$$[0,1] = ([0,1] \cap \gamma^{-1}(A_1)) \cup ([0,1] \cap \gamma^{-1}(A_2))$$

con unione disgiunta e $\gamma^{-1}(A_1))$ e $\gamma^{-1}(A_2)$ aperti non vuoti in $[0,1]$. Questo è assurdo.

□

Esercizio 22. Si consideri il seguente sottoinsieme del piano:

$$A = \big\{(x, \sin(1/x)) \in \mathbb{R}^2 : x \in (0,1]\big\} \cup \big\{(0,y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [-1,1]\big\}$$

con la topologia indotta dal piano. Provare che A è connesso ma non è connesso per archi.

Esempio 6.8.

1) $\mathbb{R}^n$ è connesso per ogni $n \geq 1$.
2) $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ è connesso per $n \geq 2$ ma non è connesso per $n = 1$.
3) $\mathbb{R}^n \setminus \{x \in \mathbb{R}^n : x_n = 0\}$ non è connesso, $n \geq 1$.
4) $\mathbb{R}^n \setminus \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\}$ non è connesso, $n \geq 1$.

Teorema 6.9. Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ un aperto connesso (non vuoto). Allora A è connesso per archi.

Dim. Dimostreremo un'affermazione più precisa: A è connesso per curve poligonali. Sia $x_0 \in A$ un punto scelto a nostro piacere. Definiamo il seguente insieme

$$A_1 = \big\{x \in A : x \text{ si connette a } x_0 \text{ con una curva poligonale contenuta in } A\big\}.$$

Proviamo che A_1 è aperto. Infatti, se $x \in A_1 \subset A$ allora esiste $\varepsilon > 0$ tale che $B_\varepsilon(x) \subset A$, in quanto A è aperto. Ogni punto di $y \in B_\varepsilon(x)$ si collega al centro x con un segmento contenuto in A. Dunque y si collega a x_0 con una curva poligonale contenuta in A, ovvero $B_\varepsilon(x) \subset A_1$.

Sia $A_2 = A \setminus A_1$. Proviamo che anche A_2 è aperto. Se $x \in A_2 \subset A$ allora esiste $\varepsilon > 0$ tale che $B_\varepsilon(x) \subset A$. Affermiamo che $B_\varepsilon(x) \subset A_2$. Se così non fosse troveremmo $y \in B_\varepsilon(x) \cap A_1$. Il punto x_0 si collega a y con una curva poligonale in A ed y si collega ad x con un segmento contenuto in A. Quindi $x \in A_1$, che non è possibile. Questo argomento prova che A_2 è aperto. Allora abbiamo

$$X = A_1 \cup A_2$$

con A_1 e A_2 aperti ed unione disgiunta. Siccome X è connesso, uno degli aperti deve essere vuoto. Siccome $A_1 \neq \emptyset$ allora $A_2 = \emptyset$. Questo termina la dimostrazione.

□

Teorema 6.10 (Valori intermedi). Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ un aperto connesso e sia $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Allora per ogni $t \in (\inf_A f, \sup_A f)$ esiste un punto $x \in A$ tale che $f(x) = t$.

Dim. Siano $x_0, x_1 \in A$ tali che $f(x_0) < t < f(x_1)$. Sia $\gamma : [0,1] \to A$ una curva continua tale che $\gamma(0) = x_0$ e $\gamma(1) = x_1$. La composizione $\varphi(s) = f(\gamma(s))$, $s \in [0,1]$, è continua. Per il Teorema dei valori intermedi in una dimensione esiste $s \in (0,1)$ tale che $\varphi(s) = t$. Il punto $x = \gamma(s) \in A$ verifica la tesi del teorema.

□

7. Esercizi

7.1. Spazi normati.

Esercizio 23. Siano $1 < p, q < \infty$ tali che $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Provare la disuguaglianza

$$t \leq \frac{1}{p} t^p + \frac{1}{q}, \quad t \geq 0,$$

e dedurre che

$$st \leq \frac{t^p}{p} + \frac{s^q}{q}, \quad s, t \geq 0.$$

Infine, provare la disuguaglianza di Minkowski:

$$\langle x, y \rangle \leq \|x\|_p \|y\|_q, \quad x, y \in \mathbb{R}^n, \tag{7.7}$$

che vale anche nel caso $p = 1$ e $q = \infty$. Si tratta di una generalizzazione della disuguaglianza di Cauchy-Schwarz.

Esercizio 24. Provare che $C^1([0,1])$ con la norma

$$\|f\|_{C^1} = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$$

è uno spazio di Banach. Provare che $C^1([0,1])$ con la norma

$$\|f\|_{C^1,*} = |f(0)| + \|f'\|_\infty,$$

pure è uno spazio di Banach. Provare che le due norme sono equivalenti.

7.2. Contrazioni e punti fissi.

Esercizio 25. Determinare tutti i numeri $\alpha \geq 0$ tali che la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \sqrt{1 + \alpha x^2}, \quad x \in \mathbb{R},$$

sia una contrazione rispetto alla distanza Euclidea.

Esercizio 26. Sia $X = C([0,1])$ con la sup-norma. Provare che per $\alpha > 0$, la funzione $T : X \to X$

$$T(f)(x) = \mathrm{e}^{-\alpha x} \int_0^x \mathrm{e}^{\alpha t} f(t)\, dt$$

è una contrazione.

Esercizio 27. Sia $h \in C([0,1])$ una funzione assegnata. Verificare che l'equazione funzionale

$$f(x) = h(x) + \frac{1}{2} \sin(x) \int_0^x f(t) dx, \quad x \in [0,1],$$

ha una soluzione unica $f \in C([0,1])$.

Esercizio 28. Sia $\alpha \in \mathbb{R}$ e si consideri l'equazione

$$\sin x + \int_0^x \sqrt{1 + f'(t)^2} dt = \alpha f(x), \quad x \in [0,1].$$

i) Provare che per $|\alpha| > 1$ l'equazione ha un'unica soluzione $f \in C^1([0,1])$.
ii) Provare che per $|\alpha| \leq 1$ l'equazione non ha soluzione.

Esercizio 29. Siano $\lambda \in \mathbb{R}$ e $b \in \mathbb{R}^n$ e consideriamo la funzione $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

$$T(x) = \lambda x + b, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

1) Calcolare una formula per l'iterazione $T^k(x_0) = T \circ ... \circ T(x_0)$ k volte, dove $x_0 \in \mathbb{R}^n$ è un punto fissato;
2) Stabilire per quali valori di λ la trasformazione T è una contrazione rispetto alla distanza Euclidea e per tali valori calcolare il limite di $T^k(x_0)$ per $k \to \infty$.

Esercizio 30. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione con costante di Lipschitz $L = \mathrm{Lip}(f) < 1$. Provare che la funzione $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$F(x, y) = \big(x + f(y), y + f(x)\big), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

è iniettiva e suriettiva.

Esercizio 31. Si considerino il quadrato $Q = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \le 1 \text{ e } |y| \le 1\}$ e la funzione $f : Q \to \mathbb{R}^2$ così definita

$$f(x, y) = \Big(\frac{1}{6}(1 - y - y^2), \frac{1}{6}(x^2 - x - 1)\Big).$$

1) Provare che $f(Q) \subset Q$.
2) Usando il teorema delle contrazioni, provare che il sistema di equazioni

$$\begin{cases} 6x = 1 - y - y^2 \\ 6y = x^2 - x - 1 \end{cases}$$

ha una soluzione unica $(x, y) \in Q$.

Esercizio 32. Per $n \ge 1$ siano $B = \big\{x \in \mathbb{R}^n : |x| \le 1\big\}$ e $x_0 \in B$ tale che $|x_0| \le \frac{1}{12}$. Sia poi $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ la funzione

$$T(x) = \frac{1}{4}x + \frac{1}{9}|x|^2 x + x_0.$$

1) Provare che T trasforma B in se, ovvero che $T(B) \subset B$.
2) Provare che l'equazione $T(x) = x$ ha una soluzione unica $x \in B$.

Esercizio 33. Sia X uno spazio metrico compatto e sia $T : X \to X$ un'applicazione tale che $d(T(x), T(y)) < d(x, y)$ per ogni $x, y \in X$ tali che $x \ne y$. Provare che T ha un unico punto fisso su X.

7.3. Trasformazioni lineari.

Esercizio 34. Sia $X = C([0, 1])$ munito della sup-norma e sia $T : X \to \mathbb{R}$ l'applicazione

$$T(f) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n} f\big(1/n\big).$$

i) Provare che $T \in \mathcal{L}(X, \mathbb{R})$;
ii) Calcolare $\|T\|$;
iii) Stabilire se esiste una funzione $f \in X$ con $\|f\|_\infty \le 1$ tale che $T(f) = \|T\|$.

ESERCIZIO 35. Sia $X = \big\{ f \in C^1([-\pi,\pi]) : f(-\pi) = f(\pi) \big\}$ munito della norma $\|\cdot\|_\infty$. Sia $T : X \to \mathbb{R}$ la trasformazione

$$T(f) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx.$$

1) Provare che la serie che definisce $T(f)$ converge e che T è lineare.
2) Provare che T non è limitata da $(X, \|\cdot\|_\infty)$ in $\mathbb{R}$.

ESERCIZIO 36. Siano X e Y spazi normati. Provare che se Y è completo, allora anche $\mathcal{L}(X,Y)$ è completo, con la norma operatoriale.

ESERCIZIO 37. Sia $X = C([0,1])$ munito della sup-norma, e sia $k : [0,1]\times[0,1] \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Definiamo l'applicazione $T : X \to X$

$$T(f)(s) = \int_0^1 k(s,t)f(t)\,dt, \quad f \in X.$$

i) Provare che $s \mapsto T(f)(s)$ è continua su $[0,1]$.
ii) Provare che $T \in \mathcal{L}(X,X)$.
iii) Dare condizioni su k affinchè T sia una contrazione.

7.4. Altri esercizi.

ESERCIZIO 38. Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ un insieme non-vuoto e definiamo la funzione distanza

$$f(x) = \mathrm{dist}(x,A) = \inf_{y\in A} |x-y|, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Provare che f è 1-Lipschitziana.

ESERCIZIO 39. Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ un insieme chiuso e sia $x \in \mathbb{R}^n$. Un punto $\bar{x} \in A$ si dice proiezione metrica di $x \in \mathbb{R}^n$ su A se $|x-\bar{x}| = \mathrm{dist}(x,A)$. Provare che ogni punto $x \in \mathbb{R}^n$ ha almeno una proiezione metrica. Provare che se A è convesso allora la proiezione metrica è unica.

ESERCIZIO 40. Sia $f \in C^1(\mathbb{R})$ e consideriamo il sottografico $A = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \le f(x)\big\}$. È vero che ogni $p \in \partial A$ è proiezione metrica di almeno un punto $q \in \mathbb{R}^2 \setminus A$?

Rispondere alla stessa domanda con $f \in C^2(\mathbb{R})$.

ESERCIZIO 41. Per ogni $x \in \mathbb{R}^n$ sia $A(x) = (a_{ij}(x))_{i,j=1,\dots,n}$ una matrice $n \times n$ simmetrica tale che $x \mapsto A(x)$ sia continua, ovvero $x \mapsto a_{ij}(x)$ è continua per ogni $i,j = 1,\dots,n$. Siano $\lambda_1(x) \le \dots \le \lambda_n(x) \in \mathbb{R}$ gli autovalori di $A(x)$. Per ogni vettore $v \in \mathbb{R}^n$ e per ogni $x \in \mathbb{R}^n$ vale

$$\lambda_1(x)|v|^2 \le \langle A(x)v, v\rangle \le \lambda_n(x)|v|^2.$$

Supponiamo che $\lambda_1 \ge 0$. Per ogni curva $\gamma \in C^1([0,1];\mathbb{R}^n)$, o più in generale C^1 a tratti su $[0,1]$, definiamo la lunghezza

$$\ell(\gamma) = \int_0^1 \langle A(\gamma(t))\dot\gamma(t), \dot\gamma(t)\rangle^{1/2} dt.$$

Quando $A(x)$ è la matrice identità si ottiene la lunghezza Euclidea di γ.

Dati due punti $x, y \in \mathbb{R}^n$ definiamo

$$d(x,y) = \inf \big\{ \ell(\gamma) : \gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^n \ C^1 \text{ a tratti con } \gamma(0) = x \text{ e } \gamma(1) = y \big\}.$$

1) Supponiamo che esista $m > 0$ tale che $\lambda_1(x) \geq m$ per ogni $x \in \mathbb{R}^n$. Provare che $(\mathbb{R}^n, d)$ è uno spazio metrico.
2) Supponiamo in aggiunta che esista $M > 0$ tale che $\lambda_n(x) \leq M$ per ogni $x \in \mathbb{R}^n$. Provare che $(\mathbb{R}^n, d)$ è uno spazio metrico completo.

Lo spazio metrico $(\mathbb{R}^n, d)$ è un esempio di "varietà Riemanniana".

CAPITOLO 4

Calcolo differenziale in più variabili

1. Derivate parziali e derivate direzionali in $\mathbb{R}^n$

Fissiamo su $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, la base canonica $\mathrm{e}_1, \dots, \mathrm{e}_n$, dove, per ogni $i = 1, \dots, n$, si ha

$$\mathrm{e}_i = \big(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0\big) \in \mathbb{R}^n,$$

con 1 nella posizione i-esima.

Definizione 1.1 (Derivata parziale). Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ un insieme aperto. Diciamo che una funzione $f : A \to \mathbb{R}$ ha derivata parziale i-esima, $i = 1, \dots, n$, nel punto $x \in A$ se esiste finito il limite

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x + t\mathrm{e}_i) - f(x)}{t}.$$

Diremo che f è *derivabile in* x se esistono tutte le derivate parziali $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x)$ per ogni $i = 1, \dots, n$.

Osserviamo che, essendo A aperto ed $x \in A$, si ha $x + t\mathrm{e}_i \in A$ per ogni t sufficientemente piccolo e quindi il limite che definisce la derivata parziale è ben definito.

Esempio 1.2. Le derivate parziali si calcolano con le regole del calcolo differenziale di una variabile. Sia ad esempio $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione

$$f(x, y) = \mathrm{e}^{x^2} \sin y, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Allora le derivate parziali esistono in ogni punto e sono

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x\mathrm{e}^{x^2} \sin y, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \mathrm{e}^{x^2} \cos y.$$

Esempio 1.3. La funzione $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x| = (x_1^2 + \ldots + x_n^2)^{1/2}$, non è derivabile in $x = 0$. Per $x \neq 0$, f è invece derivabile e inoltre

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \frac{x_i}{|x|}, \quad x \neq 0.$$

Osservazione 1.4. Nella letteratura si incontrano le seguenti notazioni alternative per indicare le derivate parziali

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \partial_i f = \partial_{x_i} f = D_i f = f_{x_i}.$$

Osservazione 1.5 (Significato geometrico delle derivate parziali). Consideriamo una funzione $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ derivabile nel punto $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. Le due curve $\gamma_1,\gamma_2:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3$

$$\gamma_1(t)=\big(x+t,y,f(x+t,y)\big),\quad \gamma_2(t)=\big(x,y+t,f(x,y+t)\big),\quad t\in\mathbb{R},$$

sono derivabili in $t=0$ e i vettori in $\mathbb{R}^3$

$$\gamma_1'(0)=(1,0,f_x(x,y)\big),\quad \gamma_2'(0)=(0,1,f_y(x,y)\big)$$

sono linearmente indipendenti e generatono dunque un piano 2-dimensionale in $\mathbb{R}^3$. Questo è il *candidato* piano tangente al grafico di

$$\mathrm{gr}(f)=\big\{(x,y,f(x,y))\in\mathbb{R}^3:(x,y)\in\mathbb{R}^2\big\}$$

nel punto $(0,f(0))\in\mathrm{gr}(f)$.

Definizione 1.6 (Gradiente). Sia $A\subset\mathbb{R}^n$ un aperto e sia $f:A\to\mathbb{R}$ una funzione derivabile nel punto $x\in A$. Il vettore

$$Df(x)=\nabla f(x)=\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x),\dots,\frac{\partial f}{\partial x_n}(x)\right)\in\mathbb{R}^n$$

si dice *gradiente di f in x*.

Osservazione 1.7 (Significato geometrico del gradiente). Supponiamo che sia $\nabla f(x)\neq 0$. Il vettore $\nabla f(x)$ contiene due informazioni:

i) Il versore orientato $\nabla f(x)/|\nabla f(x)|$ indica la direzione orientata di massima crescita della funzione f.
ii) La lunghezza $|\nabla f(x)|$ misura la velocità di crescita.

Lasciamo, per ora, tali affermazioni alla loro vaghezza.

Definizione 1.8 (Derivata direzionale). Sia $A\subset\mathbb{R}^n$ un insieme aperto. Diciamo che una funzione $f:A\to\mathbb{R}$ ha derivata direzionale nella direzione $v\in\mathbb{R}^n$ nel punto $x\in A$ se esiste finito il limite

$$f_v(x)=\frac{\partial f}{\partial v}(x)=\lim_{t\to 0}\frac{f(x+tv)-f(x)}{t}.$$

Esempio 1.9. Sia $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ la funzione definita nel seguente modo

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^4+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0 & x=y=0.\end{cases}$$

Calcoliamo le derivate direzionali di f in $0\in\mathbb{R}^2$ in una generica direzione $v=(v_1,v_2)\in\mathbb{R}^2$ con $v\neq 0$:

$$\frac{\partial f}{\partial v}(0)=\lim_{t\to 0}\frac{f(tv)-f(0)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{v_1^2v_2}{t^2v_1^4+v_2^2}.$$

Quando $v_1=0$ oppure $v_2=0$ il limite è certamente 0. Dunque, si trova in particolare

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0)=\frac{\partial f}{\partial y}(0)=0.$$

Inoltre, quando $v_2 \neq 0$ si ha

$$\frac{\partial f}{\partial v}(0) = \lim_{t\to 0} \frac{v_1^2 v_2}{t^2 v_1^4 + v_2^2} = \frac{v_1^2}{v_2}.$$

Osserviamo che il limite ottenuto non è un'espressione lineare in v.

La funzione f, dunque, ha derivata direzionale in 0 in ogni direzione. Tuttavia, f non è continua in 0, dal momento che per ogni $m \in \mathbb{R}$ risulta

$$\lim_{t\to 0} f(t, mt^2) = \frac{m}{1+m^2}$$

e il valore del limite dipende dall'apertura della parabola.

Nel grafico di f

$$\mathrm{gr}(f) = \big\{(x, y, f(x, y)) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in \mathbb{R}^2\big\}$$

c'è uno "strappo" nel punto $0 \in \mathrm{gr}(f)$. Questo impedisce l'esistenza di un "piano tangente" al grafico, comunque si intenda la nozione di "piano tangente".

In conclusione, la nozione di funzione derivabile è naturale ed utile. Tuttavia è insoddisfacente per almeno due motivi: per $n \geq 2$ la derivabilità (anche in tutte le direzioni) non implica la continuità; sempre per $n \geq 2$ la derivabilità non implica l'esistenza di un piano tangente al grafico della funzione.

2. Funzioni a valori vettoriali

Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ un insieme aperto e consideriamo una funzione $f : A \to \mathbb{R}^m$, $m \geq 1$. Avremo $f = (f_1, \dots, f_m)$ dove $f_j : A \to \mathbb{R}$, $j = 1, \dots, m$, sono le funzioni coordinate di f. D'ora in avanti, ci atterremo alla convenzione di rappresentare f come un vettore colonna

$$f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_m \end{pmatrix}. \tag{2.8}$$

Diciamo che f è derivabile in un punto $x \in A$ se ciascuna coordinata $f_1, \dots, f_m$ è derivabile in x. In questo caso, scriveremo

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_i}(x) \\ \vdots \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial x_i}(x) \end{pmatrix}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Definizione 2.1 (Matrice Jacobiana). Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ un aperto e sia $f : A \to \mathbb{R}^m$ una funzione derivabile nel punto $x \in A$. La matrice

$$J_f(x) = Jf(x) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \dots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial x_1}(x) & \dots & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nabla f_1(x) \\ \vdots \\ \nabla f_m(x) \end{pmatrix}$$

si dice *matrice Jacobiana di f in x*. La matrice $Jf(x)$ ha m righe and n colonne.

Il significato geometrico della matrice Jacobiana è più recondito. Ritorneremo su questo punto nel Capitolo **??**.

3. Richiami di algebra lineare

Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una trasformazione lineare, $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$. Fissiamo le basi

$$\begin{aligned} &\mathrm{e}_1, \dots, \mathrm{e}_n \quad \text{base canonica di } \mathbb{R}^n, \\ &\mathrm{e}_1, \dots, \mathrm{e}_m \quad \text{base canonica di } \mathbb{R}^m. \end{aligned}$$

Siano $T_{ij} \in \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, m$ e $j = 1, \dots, n$, i numeri reali definiti tramite la seguente relazione

$$T\mathrm{e}_j = \sum_{i=1}^{m} T_{ij}\mathrm{e}_i, \quad j = 1, \dots, n.$$

Esiste una corrispondenza biunivoca fra la trasformazione lineare T e la matrice $(T_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}$. Scriviamo il punto $x \in \mathbb{R}^n$ come vettore colonna

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n.$$

Avremo allora, con la notazione di prodotto righe-colonne,

$$T(x) = Tx = \begin{pmatrix} T_{11} & \dots & T_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ T_{m1} & \dots & T_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \displaystyle\sum_{j=1}^{n} T_{1j}x_j \\ \vdots \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{n} T_{mj}x_j \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n.$$

La corrispondenza fra T e la matrice $(T_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}$ dipende dalla scelta delle basi canoniche su $\mathbb{R}^n$ ed $\mathbb{R}^m$.

4. Funzioni differenziabili

In questa sezione introduciamo la definizione di funzione *differenziabile.*

Definizione 4.1 (Differenziale). Sia $A \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, un insieme aperto. Una funzione $f : A \to \mathbb{R}^m$, $m \geq 1$, si dice *differenziabile* (o Fréchet-differenziabile) in un punto $x_0 \in A$ se esiste una trasformazione lineare $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ tale che

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - T(x - x_0)}{|x - x_0|} = 0. \tag{4.9}$$

Chiameremo la trasformazione lineare

$$df(x_0) = T$$

il *differenziale di f in x_0*.

Osservazione 4.2. Lasciamo al lettore il compito di verificare le seguenti affermazioni.

1. Unicità del differenziale. Se il differenziale esiste allora esso è unico. Precisamente, se $T, \widehat{T} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ sono trasformazioni lineari che verificano (4.9) (per lo stesso punto x_0), allora $T = \widehat{T}$. Infatti, per ogni $v \in \mathbb{R}^n$ si ha

$$Tv = \lim_{t\to 0^+} \frac{f(x_0 + tv) - f(x_0)}{t}$$

e l'unicità di T segue dall'unicità del limite.

2. Caso $n = 1$. Quando $n = 1$ (e indipendentemente da $m \geq 1$), le nozioni di derivabilità e differenziabilità coincidono e inoltre

$$df(x_0) = f'(x_0) \quad \text{come vettori di } \mathbb{R}^m.$$

La verifica di queste affermazioni è lasciata come esercizio.

3. Differenziale di una trasformazione lineare. Se $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ è lineare, allora $df(x_0) = f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ in ogni punto $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Questo segue in modo elementare dal fatto che per ogni $x \in \mathbb{R}^n$ si ha

$$f(x) - f(x_0) - df(x_0)(x - x_0) = f(x) - f(x_0) - f(x - x_0) = 0.$$

4. Caso vettoriale. Una funzione f a valori in $\mathbb{R}^m$ è differenziabile se e solo se le sue m coordinate sono differenziabili.

La Definizione 4.1 ha una generalizzazione naturale nell'ambito degli spazi normati.

Definizione 4.3. Siano $(X, \|\cdot\|_X)$ e $(Y, \|\cdot\|_Y)$ due spazi normati, e sia $A \subset X$ un aperto. Una funzione $f : A \to Y$ si dice *Fréchet-differenziabile* in un punto $x_0 \in A$ se esiste una trasformazione lineare e continua $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ tale che

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\|f(x) - f(x_0) - T(x - x_0)\|_Y}{\|x - x_0\|_Y} = 0. \tag{4.10}$$

La trasformazione lineare $df(x_0) = T$ si chiama il *differenziale di f in x_0*.

Il differenziale è per definizione una trasformazione lineare e *continua*.

Teorema 4.4 (Caratterizzazione della differenziabilità). Sia $f : A \to \mathbb{R}^m$ una funzione con $A \subset \mathbb{R}^n$ insieme aperto e $x_0 \in A$. Sono equivalenti le seguenti affermazioni:

A) La funzione f è differenziabile in x_0.

B) Esistono una trasformazione lineare $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ ed una funzione $E_{x_0} : A \to \mathbb{R}^m$ tali che $f(x) = f(x_0) + T(x - x_0) + E_{x_0}(x)$ per $x \in A$ e

$$E_{x_0}(x) = o(|x - x_0|), \quad x \to x_0.$$

Dim. A)$\Rightarrow$B). Scegliamo $T = df(x_0)$ e definiamo $E_{x_0}(x) = f(x) - f(x_0) - T(x - x_0)$. La funzione E_{x_0} verifica la proprietà richiesta

$$\lim_{x\to x_0} \frac{E_{x_0}(x)}{|x - x_0|} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - T(x - x_0)}{|x - x_0|} = 0,$$

in quanto f è differenziabile.

B)⇒A) Proviamo che $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, R^m)$ data in B) è il differenziale di f:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - T(x - x_0)}{|x - x_0|} = \lim_{x\to x_0} \frac{E_{x_0}(x)}{|x - x_0|} = 0.$$

□

TEOREMA 4.5. Sia $f : A \to \mathbb{R}^m$ una funzione differenziabile nel punto $x_0 \in A$ con $A \subset \mathbb{R}^n$ insieme aperto. Allora:

i) f è continua in x_0.

ii) f ha in x_0 derivata direzionale in ogni direzione $v \in \mathbb{R}^n$ e inoltre

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x_0) = df(x_0)(v). \tag{4.11}$$

In particolare, la differenziabilità implica la derivabilità.

Dim. i) Usiamo la caratterizzazione B) della differenziabilità nel teorema precedente, la continuità di T e le proprietà di E_{x_0}:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} \big(f(x_0) + T(x - x_0) + E_{x_0}(x)\big) = f(x_0).$$

ii) Usiamo di nuovo la caratterizzazione B):

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial v}(x_0) &= \lim_{t\to 0} \frac{f(x_0 + tv) - f(x_0)}{t}\\ &= \lim_{t\to 0} \frac{df(x_0)(tv) + E_{x_0}(x_0 + tv)}{t}\\ &= df(x_0)(v) + \lim_{t\to 0} \frac{E_{x_0}(x_0 + tv)}{t} = df(x_0)(v).\end{aligned}$$

□

OSSERVAZIONE 4.6 (Significato geometrico del gradiente). Quando $m = 1$ si ha $df(x_0)(v) = \langle \nabla f(x_0), v\rangle$ e quindi si ottiene la seguente formula di rappresentazione per la derivata direzionale

$$f_v(x_0) = \frac{\partial f}{\partial v}(x_0) = \langle \nabla f(x_0), v\rangle.$$

Se $|v| = 1$ allora $|f_v(x_0)| = |\langle \nabla f(x_0), v\rangle| \le |\nabla f(x_0)|$. Deduciamo che

$$\max_{|v|=1} f_v(x_0) = |\nabla f(x_0)|$$

e il massimo è raggiunto con la scelta $v = \nabla f(x)/|\nabla f(x)|$.

OSSERVAZIONE 4.7 (Test della differenziabilità). Quando $m = 1$, la formula (4.9) che definisce la differenziabilità si può riscrivere nel seguente modo

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - \langle \nabla f(x_0), x - x_0\rangle}{|x - x_0|} = 0. \tag{4.12}$$

Dunque, per controllare la differenziabilità di f in x_0 si controlla prima l'esistenza delle derivate parziali in x_0, e poi si verifica che il limite in (4.12) sia zero.

Osservazione 4.8 (Identificazione di $df(x_0)$ e $Jf(x_0)$). Sia ora f a valori in $\mathbb{R}^m$ con $m \geq 1$ e sia $(T_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m\\ j=1,\dots,n}}$ la matrice associata al differenziale $T = df(x_0)$. Allora avremo

$$T_{ij} = \langle T\mathrm{e}_j, \mathrm{e}_i\rangle = \langle df(x_0)(\mathrm{e}_j), \mathrm{e}_i\rangle = \langle f_{x_j}(x_0), \mathrm{e}_i\rangle = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_0).$$

Dunque, possiamo identificare $df(x_0)$ con la matrice Jacobiana $Jf(x_0)$

$$df(x_0) = Jf(x_0).$$

Questa identificazione dipende dalla scelta delle basi canoniche.

Esercizio 42. Calcolare tutti gli $m, n \in \mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$ tali che la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ così definita

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^m y^n}{x^2 + y^2} & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0 & x^2 + y^2 = 0 \end{cases} \tag{4.13}$$

1) abbia tutte le derivate direzionali in $0 \in \mathbb{R}^2$;
2) sia differenziabile in $0 \in \mathbb{R}^2$.

Soluzione. 1) Sia $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ una direzione $v \neq 0$. Allora

$$f(tv) - f(0) = t^{m+n-2}\frac{v_1^m v_2^n}{v_1^2 + v_2^2},$$

e dunque

$$\frac{\partial f}{\partial v}(0) = \lim_{t\to 0}\frac{f(tv) - f(0)}{t} = \lim_{t\to 0} t^{m+n-3}\frac{v_1^m v_2^n}{v_1^2 + v_2^2} = \begin{cases} 0, & \text{se } m + n > 3 \\ \dfrac{v_1^m v_2^n}{v_1^2 + v_2^2}, & \text{se } m + n = 3. \end{cases}$$

Dunque, esistono tutte le derivate direzionali se e solo se $m + n \geq 3$.

2) Quando $m + n = 3$, l'applicazione $v \mapsto f_v(0)$ non è lineare e dunque f non può essere differenziabile in 0. Nel caso $m + n > 3$ si ha

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0) = 0,$$

e dunque dobbiamo studiare il limite per $(x, y) \to 0 \in \mathbb{R}^2$ del quoziente

$$\frac{f(x, y) - f(0) - \langle \nabla f(0), (x, y)\rangle}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{x^m y^n}{(x^2 + y^2)^{3/2}} = (*).$$

Con le coordinate polari $x = r\cos\vartheta$ e $y = r\sin\vartheta$ si trova

$$|(*)| = r^{m+n-3}|\cos\vartheta|^m|\sin\vartheta|^n \leq r^{m+n-3},$$

con maggiorazione *indipendente da* ϑ. Questo prova che

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x, y) - f(0) - \langle \nabla f(0), (x, y)\rangle}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0,$$

e con ciò la differenziabilità di f in 0 quando $m + n > 3$.

Definizione 4.9 (Piano tangente ad un grafico). Sia $f : A \to \mathbb{R}$ differenziabile in un punto $x_0 \in A$. Sappiamo allora che si ha lo sviluppo

$$f(x) = f(x_0) + \langle \nabla f(x_0), x - x_0 \rangle + E_{x_0}(x),$$

dove $E_{x_0}(x) = o(|x - x_0|)$ per $x \to x_0$. Consideriamo la parte lineare dello sviluppo

$$\varphi(x) = f(x_0) + \langle \nabla f(x_0), x - x_0 \rangle, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

La funzione $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ è affine, verifica $\varphi(x_0) = f(x_0)$ e $|f(x) - \varphi(x)| = o(|x - x_0|)$ per $x \to x_0$. Il suo grafico

$$\mathrm{gr}(\varphi) = \big\{(x, \varphi(x)) \in \mathbb{R}^{n+1} : x \in \mathbb{R}^n\big\}$$

è un piano affine n-dimensionale che si dice *piano tangente (affine) al grafico di* f nel punto $(x_0, f(x_0)) \in \mathrm{gr}(f)$.

Esempio 4.10. Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ la funzione $f(x) = \sqrt{1 + |x|^2}$ e consideriamo la superficie n-dimensionale

$$M = \mathrm{gr}(f) = \big\{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^{n+1} : x \in \mathbb{R}^n\big\}.$$

M è la falda superiore di un iperboloide di rotazione n-dimensionale. Calcoliamo il piano tangente ad M nel punto $(x_0, f(x_0)) \in \mathrm{gr}(f)$. Il gradiente di f in x_0 è

$$\nabla f(x_0) = \frac{x_0}{\sqrt{1 + |x_0|^2}}.$$

Il piano tangente (affine) è il grafico della funzione

$$\varphi(x) = f(x_0) + \langle \nabla f(x_0), x - x_0 \rangle = \sqrt{1 + |x_0|^2} + \frac{\langle x_0, x - x_0 \rangle}{\sqrt{1 + |x_0|^2}} = \frac{1 + \langle x_0, x \rangle}{\sqrt{1 + |x_0|^2}},$$

e precisamente

$$\mathrm{gr}(\varphi) = \Big\{(x, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : x_{n+1} = \frac{1 + \langle x_0, x \rangle}{\sqrt{1 + |x_0|^2}}\Big\}.$$

5. Differenziale della funzione composta

In questa sezione proviamo la formula per il differenziale della funzione composta. Nel caso di somma e prodotto di funzioni si hanno i seguenti fatti.

1. Differenziale della somma. Se $f, g : A \to \mathbb{R}^m$, $A \subset \mathbb{R}^n$ aperto, sono differenziabili in un punto $x_0 \in A$ allora anche la funzione somma $f + g$ è differenziabile in x_0 e inoltre

$$d(f + g)(x_0) = df(x_0) + dg(x_0).$$

La verifica è elementare.

2. Differenziale del prodotto. Siano $f, g : A \to \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}^n$ aperto, funzioni differenziabili in un punto $x_0 \in A$. Allora anche la funzione prodotto $f \cdot g$ è differenziabile in x_0 e inoltre

$$d(f \cdot g)(x_0) = f(x_0)dg(x_0) + g(x_0)df(x_0).$$

La verifica è elementare e si ottiene moltiplicando gli sviluppi

$$f(x) = f(x_0) + df(x_0)(x - x_0) + F_{x_0}(x)$$
$$g(x) = g(x_0) + dg(x_0)(x - x_0) + G_{x_0}(x),$$

con $F_{x_0}(x) = o(|x-x_0|)$ e $G_{x_0}(x) = o(|x-x_0|)$ per $x \to x_0$.

Teorema 5.1 (Differenziale della funzione composta). Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ un insieme aperto e sia $f : A \to \mathbb{R}^m$ una funzione differenziabile nel punto $x_0 \in A$. Sia poi $B \subset \mathbb{R}^m$ un insieme aperto tale che $f(A) \subset B$ e sia $g : B \to \mathbb{R}^k$ una funzione differenziabile nel punto $f(x_0) \in B$. Allora la funzione composta $g \circ f : A \to \mathbb{R}^k$ è differenziabile nel punto x_0 e inoltre

$$d(g \circ f)(x_0) = dg(f(x_0)) \circ df(x_0). \tag{5.14}$$

Equivalentemente, le matrici Jacobiane verificano

$$\underbrace{J_{g\circ f}(x_0)}_{k\times n} = \underbrace{J_g(f(x_0))}_{k\times m}\underbrace{J_f(x_0)}_{m\times n}, \tag{5.15}$$

con la notazione di prodotto fra matrici righe$\times$colonne.

Dim. Per il Teorema 4.4, avremo

$$f(x) = f(x_0) + T(x-x_0) + F_{x_0}(x), \quad x \in A,$$

con $T = df(x_0) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ ed $F_{x_0} : A \to \mathbb{R}^m$ tale che $F_{x_0}(x) = o(|x-x_0|)$ per $x \to x_0$. Inoltre, posto $y_0 = f(x_0)$, avremo

$$g(y) = g(y_0) + S(y-y_0) + G_{y_0}(y), \quad y \in B,$$

con $S = dg(y_0) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^k)$ ed $G_{y_0} : B \to \mathbb{R}^k$ tale che $G_{y_0}(y) = o(|y-y_0|)$ per $y \to y_0$.

Componendo f con g si trova

$$\begin{aligned} g(f(x)) &= g(f(x_0)) + S(f(x) - f(x_0)) + G_{f(x_0)}(f(x)) \\ &= g(f(x_0)) + S(T(x-x_0) + F_{x_0}(x)) + G_{f(x_0)}(f(x)) \\ &= g(f(x_0)) + S(T(x-x_0)) + S(F_{x_0}(x)) + G_{f(x_0)}(f(x)). \end{aligned}$$

Abbiamo usato la linearità di S.

Chiaramente si ha $S \circ T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^k)$. Consideriamo la funzione $H_{x_0} : A \to \mathbb{R}^k$

$$H_{x_0}(x) = S(F_{x_0}(x)) + G_{f(x_0)}(f(x)).$$

Da un lato avremo, per $x \to x_0$,

$$S(F_{x_0}(x)) = o(|x-x_0|),$$

e dall'altro, siccome $x \to x_0$ implica $f(x) \to f(x_0)$ (la differenziabilità implica la continuità), per $f(x) \neq f(x_0)$ avremo

$$\frac{G_{f(x_0)}(f(x))}{|x-x_0|} = \frac{|T(x-x_0) + E_{x_0}(x)|}{|x-x_0|}\frac{G_{f(x_0)}(f(x))}{|f(x) - f(x_0)|} = o(|x-x_0|), \quad x \to x_0.$$

Quando $f(x) = f(x_0)$, è semplicemente $G_{f(x_0)}(f(x)) = 0$.

In conclusione, $H_{x_0}(x) = o(|x-x_0|)$ per $x \to x_0$. Per il Teorema 4.4, $g \circ f$ è differenziabile in x_0 con differenziale $d(g \circ f)(x_0) = S \circ T = dg(f(x_0)) \circ df(x_0)$.

Esempio 5.2 (Derivata di una funzione lungo una curva). Sia $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ una curva derivabile (equivalentemente, differenziabile) in tutti i punti. Coerentemente con la convenzione fissata in (2.8), pensiamo γ come un vettore colonna

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} \gamma_1(t) \\ \vdots \\ \gamma_n(t) \end{pmatrix}, \quad t \in [0,1].$$

Sia poi $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una funzione differenziabile (in tutti i punti lungo la curva). Allora avremo

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} f(\gamma(t)) = J_{f\circ\gamma}(t) = J_f(\gamma(t)) J_\gamma(t) &= \Big(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\gamma(t)) \cdots \frac{\partial f}{\partial x_n}(\gamma(t)) \Big) \begin{pmatrix} \dot\gamma_1(t) \\ \vdots \\ \dot\gamma_n(t) \end{pmatrix} \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(\gamma(t)) \dot\gamma_i(t). \end{aligned}$$

Con una notazione più compatta possiamo anche scrivere

$$\frac{d}{dt} f(\gamma(t)) = \langle \nabla f(\gamma(t)), \dot\gamma(t) \rangle, \quad t \in [0,1]. \tag{5.16}$$

Esempio 5.3. Esplicitiamo la formula (5.15) del Teorema 5.1. Siano $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ e $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ due funzioni differenziabili. La composizione $G = g \circ f$ ha k componenti $G = (G_1, \dots, G_k)$, da pensare come vettore colonna. La formula (5.15), ovvero $JG(x) = Jg(f(x))\, Jf(x)$, si legge nel seguente modo:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial G_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial G_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial G_k}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial G_k}{\partial x_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial y_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_k}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial g_k}{\partial y_m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix},$$

dove le derivate parziali di g vanno calcolate nel punto $f(x)$, quelle di f e G nel punto x. Alla riga $i \in \{1, \dots, k\}$ e colonna $j \in \{1, \dots, n\}$ della matrice $JG(x)$ si trova l'entrata

$$\frac{\partial G_i}{\partial x_j}(x) = \sum_{\ell=1}^m \frac{\partial g_i}{\partial y_\ell}(f(x)) \frac{\partial f_\ell}{\partial x_j}(x).$$

6. Teoremi del valor medio

In questa sezione estendiamo il Teorema di Lagrange al caso multidimensionale.

Teorema 6.1. Sia $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione differenziabile nell'aperto $A \subset \mathbb{R}^n$, e siano $x, y \in A$ punti tali che $[x,y] := \big\{ tx + (1-t)y \in \mathbb{R}^n : t \in [0,1] \big\} \subset A$. Allora esiste un punto $z \in [x,y]$ tale che

$$f(x) - f(y) = \langle \nabla f(z), x - y \rangle. \tag{6.17}$$

Dim. Sia $\gamma : [0,1] \to A$, $\gamma(t) = tx + (1-t)y$ una parametrizzazione del segmento, e definiamo la funzione composta $\varphi = f \circ \gamma$, ovvero

$$\varphi(t) = f(tx + (1-t)y) = f(\gamma(t)), \quad t \in [0,1].$$

Per il Teorema 5.1, φ è differenziabile su $[0,1]$, e quindi per il Teorema di Lagrange esiste un punto $t^* \in [0,1]$ tale che $\varphi(1) - \varphi(0) = \varphi'(t^*)$. Per la formula (5.16),

$$\varphi'(t) = \langle \nabla f(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle, \quad t \in [0,1].$$

e dunque, posto $z = \gamma(t^*)$, si ottiene la tesi. □

Nel caso di funzioni a valori vettoriali la formulazione del Teorema del valor medio deve essere precisata.

Teorema 6.2. Sia $f : A \to \mathbb{R}^m$ una funzione differenziabile nell'aperto $A \subset \mathbb{R}^n$, e siano $x, y \in A$ punti tali che $[x,y] := \big\{ tx + (1-t)y \in \mathbb{R}^n : t \in [0,1] \big\} \subset A$. Allora per ogni $v \in \mathbb{R}^m$ esiste un punto $z \in [x,y]$ tale che

$$\langle f(x) - f(y), v \rangle = \langle df(z)(x-y), v \rangle. \tag{6.18}$$

Dim. Sia $\gamma : [0,1] \to A$, $\gamma(t) = tx + (1-t)y$ una parametrizzazione del segmento, e definiamo la funzione composta $\varphi = \langle f \circ \gamma, v \rangle$ ovvero

$$\varphi(t) = \sum_{i=1}^m f_i(tx + (1-t)y), v_i \rangle, \quad t \in [0,1].$$

Per la linearità del prodotto scalare possiamo portare la derivata in t dentro il prodotto scalare, e dunque, per il Teorema 5.1,

$$\varphi'(t) = \sum_{i=1}^m \frac{d}{dt} f_i(\gamma(t)) v_i = \sum_{i=1}^m \langle \nabla f_i(\gamma(t)), x - y \rangle v_i = \langle df(\gamma(t))(x-y), v \rangle.$$

Abbiamo omesso i conti che provano l'ultima identità.

Per il Teorema 5.1, φ è differenziabile su $[0,1]$, e quindi per il Teorema di Lagrange esiste un punto $t^* \in [0,1]$ tale che $\varphi(1) - \varphi(0) = \varphi'(t^*)$. Dunque, posto $z = \gamma(t^*)$, si ottiene la tesi.

□

Corollario 6.3. Sia $f : A \to \mathbb{R}^m$ una funzione differenziabile nell'aperto $A \subset \mathbb{R}^n$, e siano $x, y \in A$ punti tali che $[x,y] := \big\{ tx + (1-t)y \in \mathbb{R}^n : t \in [0,1] \big\} \subset A$. Allora esiste un punto $z \in [x,y]$ tale che

$$|f(x) - f(y)| \le \|df(z)\| |x-y|, \tag{6.19}$$

dove $\|df(z)\|$ è la norma di $df(z) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$.

Dim. Per ogni $v \in \mathbb{R}^m$ esiste $z \in [x,y]$ che rende vera l'identità (6.18). Scegliamo $v = f(x) - f(y)$ e, usando la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz e la (4.6), otteniamo

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)|^2 &= \langle df(z)(x-y), f(x) - f(y) \rangle \\ &\le |df(z)(x-y)| |f(x) - f(y)| \\ &\le \|df(z)\| |x-y| |f(x) - f(y)|. \end{aligned}$$

Se $|f(x) - f(y)| = 0$ la tesi è banalmente verificata. Possiamo dunque dividere per $|f(x) - f(y)| \ne 0$ e ottenere la tesi. □

Corollario 6.4. Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ un aperto convesso e sia $f : A \to \mathbb{R}^m$ una funzione differenziabile in A tale che $\|df(x)\| \leq L < \infty$ per ogni $x \in A$. Allora f è Lipschitziana e $\mathrm{Lip}(f) \leq L$.

La prova segue immediatamente dal corollario precedente.

7. Funzioni di classe C^1

Siano $A \subset \mathbb{R}^n$ un aperto ed $f : A \to \mathbb{R}^m$, $m \geq 1$, una funzione con coordinate $f = (f_1, \dots, f_m)$.

Definizione 7.1. Definiamo $C^1(A;\mathbb{R}^m)$ come l'insieme di tutte le funzioni $f : A \to \mathbb{R}^m$ tali che esistono e sono continue in A tutte le derivate parziali

$$\frac{\partial f_j}{\partial x_i} \in C(A), \quad i = 1, \dots, n, \ j = 1, \dots, m.$$

Scriveremo anche $C^1(A) = C^1(A;\mathbb{R})$.

Teorema 7.2. Se $f \in C^1(A;\mathbb{R}^m)$ allora f è differenziabile in ogni punto $x_0 \in A$.

Dim. È sufficiente provare il teorema nel caso $m = 1$. Fissato $x_0 \in A$ consideriamo la trasformazione lineare $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n;\mathbb{R})$

$$Th = \langle \nabla f(x_0), h \rangle = \sum_{j=1}^n h_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0).$$

Dobbiamo provare che

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - Th}{|h|} = 0. \tag{7.20}$$

Partiamo dalla seguente espansione telescopica:

$$\begin{aligned} f(x_0 + h) - f(x_0) &= f\Big(x_0 + \sum_{i=1}^n h_i \mathrm{e}_i\Big) - f(x_0) \\ &= \sum_{j=1}^n f\Big(x_0 + \sum_{i=1}^j h_i \mathrm{e}_i\Big) - f\Big(x_0 + \sum_{i=1}^{j-1} h_i \mathrm{e}_i\Big). \end{aligned}$$

Dal Teorema del valor medio segue che per ogni $j = 1, \dots, n$ esiste $h_j^* \in \mathbb{R}$ tale che $|h_j^*| \leq |h_j| \leq |h|$ e si ha

$$f\Big(x_0 + \sum_{i=1}^j h_i \mathrm{e}_i\Big) - f\Big(x_0 + \sum_{i=1}^{j-1} h_i \mathrm{e}_i\Big) = h_j \frac{\partial f}{\partial x_j}\Big(x_0 + \sum_{i=1}^{j-1} h_i \mathrm{e}_i + h_j^* \mathrm{e}_j\Big).$$

Deduciamo che

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - Th}{|h|} = \sum_{j=1}^n \frac{h_j}{|h|} \Big[\frac{\partial f}{\partial x_j}\Big(x_0 + \sum_{i=1}^{j-1} h_i \mathrm{e}_i + h_j^* \mathrm{e}_j\Big) - \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0)\Big],$$

dove le quantità $h_j/|h|$ rimangono limitate, mentre per la continuità delle derivate parziali si ha per ogni $j = 1, \ldots, n$:

$$\lim_{h\to 0} \Big[\frac{\partial f}{\partial x_j}\Big(x_0 + \sum_{i=1}^{j-1} h_i \mathrm{e}_i + h_j^* \mathrm{e}_j\Big) - \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0)\Big] = 0,$$

e la tesi (7.20) segue. □

Osservazione 7.3. Riassumiamo la situazione:

$$f \in C^1(A) \quad \Rightarrow \quad f \text{ differenziabile in } A \quad \Rightarrow \quad f \text{ derivabile e continua in } A.$$

Tuttavia, f può essere differenziabile in ogni punto di A senza che sia $f \in C^1(A)$. Questo fatto è già vero in dimensione $n = 1$.

8. Teorema di Rademacher

In questa sezione accenniamo ad alcuni teoremi sulla differenziabilità delle funzioni Lipschitziane. Premettiamo la nozione di insieme di misura nulla in $\mathbb{R}^n$.

Un plurirettangolo di $\mathbb{R}^n$ è un insieme della forma

$$Q = [a_1, b_1] \times \ldots \times [a_n, b_n] \subset \mathbb{R}^n,$$

con $-\infty < a_i \le b_i < \infty$ per ogni $i = 1, \ldots, n$. La *misura* (o volume) del plurirettangolo Q è il numero reale

$$|Q| = (b_1 - a_1) \cdot \ldots \cdot (b_n - a_n).$$

Definizione 8.1 (Insieme di misura nulla). Diremo che un insieme $A \subset \mathbb{R}^n$, $n \ge 1$, ha *misura nulla* in $\mathbb{R}^n$ e scriveremo $|A| = 0$, se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste una successione Q_k, $k \in \mathbb{N}$, di plurirettangoli di $\mathbb{R}^n$ tali che

$$A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} Q_k, \quad \text{e} \quad \sum_{k=1}^{\infty} |Q_k| \le \varepsilon.$$

La definizione può essere equivalentemente data usando ricoprimenti di soli cubi oppure di palle.

Esempio 8.2. Mostriamo che $\mathbb{Q}^n \subset \mathbb{R}^n$ ha misura nulla. Essendo l'insieme numerabile, si ha

$$\mathbb{Q}^n = \big\{q_k \in \mathbb{Q}^n : k \in \mathbb{N}\big\}.$$

Per ogni $k \in \mathbb{N}$, sia Q_k il cubo con faccie parallele agli iperpiani coordinati, centrato in q_k e di lato $\varepsilon^{1/n}/2^{k/n}$. Chiaramente

$$\mathbb{Q}^n \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} Q_k, \quad \text{e} \quad \sum_{k=1}^{\infty} |Q_k| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^k} = \varepsilon.$$

Osserviamo, tuttavia, che esistono insiemi di misura nulla con la cardinalità del continuo.

Teorema 8.3 (Lebesgue). Sia $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ una funzione monotona. Allora esiste un insieme $A \subset [0, 1]$ di misura nulla in $\mathbb{R}$, $|A| = 0$, tale che f è derivabile in tutti i punti di $[0, 1] \setminus A$.

La dimostrazione del Teorema di Lebesgue è impegnativa ed è il punto di partenza di vari risultati di Analisi Reale e Teoria della Misura. Si veda ad esempio Kolmogorov-Fomin, *Elementi di teoria delle funzioni e di analisi funzionale*, Mir 1980, p.319. Per le funzioni Lipschitziane (e più in generale per le funzioni a variazione limitata) vale il teorema di Jordan.

Teorema 8.4. Sia $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ una funzione Lipschitziana (più in generale: una funzione a variazione limitata). Allora esistono due funzioni $\varphi, \psi : [0, 1] \to \mathbb{R}$ monotone tali che $f = \varphi - \psi$.

Siccome l'unione di due insiemi di misura nulla ha ancora misura nulla, dal Teorema di Lebesgue segue che le funzioni Lipschitiane sono derivabili al di fuori di un insieme di misura nulla. L'estensione di questo teorema al caso di funzioni di più variabili è nota come Teorema di Rademacher.

Teorema 8.5 (Rademacher). Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $n, m \geq 1$, una funzione Lipschitziana. Allora esiste un insieme $A \subset \mathbb{R}^n$ di misura nulla, $|A| = 0$, tale che f è differenziabile in tutti i punti di $\mathbb{R}^n \setminus A$.

La dimostrazione si basa sul risultato unidimensionale $n = 1$. Si veda Evans-Gariepy, *Measure Theory and Fine Properties of Functions*, p.81 (ed anche p.235, per una dimostrazione basata sulla teoria degli Spazi di Sobolev).

Esempio 8.6. Sia $K \subset \mathbb{R}^n$ un chiuso. La funzione distanza $f(x) = \mathrm{dist}(x, K)$ è 1-Lipschitziana. Dunque, è differenziabile al di fuori di un insieme di misura nulla.

9. Derivate di ordine superiore. Teorema di Schwarz

Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ un insieme aperto e sia $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile, ovvero con tutte le derivate parziali

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} : A \to \mathbb{R}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Possiamo allora definire, se esistono, le derivate parziali di ordine 2

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} = D_j D_i f = f_{x_i x_j}, \quad i, j = 1, \dots, n.$$

Nel caso di indici uguali, scriveremo

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_i} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}.$$

In generale, l'ordine in cui sono calcolate le derivate parziali è rilevante.

Esempio 9.1. Calcoliamo le derivate parziali seconde miste in 0 della funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x, y) = \begin{cases} xy\dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & \text{se } x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Se $x^2 + y^2 \neq 0$, la derivata parziale di f in x è

$$f_x(x, y) = \frac{x^4 y + 4x^2 y^3 - y^5}{(x^2 + y^2)^2},$$

mentre $f_x(0,0) = 0$. Di conseguenza,

$$f_{xy}(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{f_x(0,y) - f_x(0,0)}{y} = -1.$$

D'altra parte, per un evidente argomento di simmetria, si ha

$$f_{yx}(0,0) = 1.$$

Dunque, entrambe le derivate parziali miste in 0 esistono, ma sono diverse:

$$f_{xy}(0) = -1 \neq 1 = f_{yx}(0).$$

Se le derivate parziali seconde miste sono continue, tuttavia, allora coincidono. Precisamente, si ha il seguente teorema:

Teorema 9.2 (Schwarz). Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione con le derivate parziali seconde miste definite in un intorno di $0 \in \mathbb{R}^2$ e continue nel punto 0. Allora si ha

$$f_{xy}(0) = f_{yx}(0).$$

Dim. Definiamo la funzione

$$\Delta(h,k) = f(h,k) - f(h,0) - f(0,k) + f(0,0) = F(h,k) - F(0,k), \quad h,k \in \mathbb{R},$$

dove $F(h,k) = f(h,k) - f(h,0)$. Per il Teorema di Lagrange (o del valor medio) esiste $h^* \in (0,h)$ tale che

$$F(h,k) - F(0,k) = F_x(h^*,k)h = \big(f_x(h^*,k) - f_x(h^*,0)\big)h.$$

Di nuovo per il Teorema del valor medio, esiste $\widehat{k} \in (0,k)$ tale che $f_x(h^*,k) - f_x(h^*,0) = f_{xy}(h^*,\widehat{k})k$. Scegliendo $k = h$, facendo il limite $h \to 0$ e usando la continuità della funzione $(x,y) \to f_{xy}(x,y)$ in $0 \in \mathbb{R}^2$, si trova

$$\lim_{h\to 0} \frac{\Delta(h,h)}{h^2} = \lim_{h\to 0} f_{xy}(h^*,\widehat{h}) = f_{xy}(0).$$

In modo analogo, partendo da

$$\Delta(h,k) = f(h,k) - f(0,k) - f(h,0) + f(0,0) = G(h,k) - G(h,0),$$

dove $G(h,k) = f(h,k) - f(0,k)$, si trova per un opportuno $k^* \in (0,k)$ e per un opportuno $\widehat{h} \in (0,h)$

$$\Delta(h,k) = G_y(h,k^*)k = k\big(f_y(h,k^*) - f_y(0,k^*)\big) = khf_{yx}(\widehat{h},k^*),$$

e dunque

$$\lim_{h\to 0} \frac{\Delta(h,h)}{h^2} = \lim_{h\to 0} f_{yx}(\widehat{h},h^*) = f_{yx}(0).$$

La tesi segue dall'unicità del limite.

□

Definizione 9.3. Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ un insieme aperto. Definiamo $C^2(A)$ come l'insieme di tutte le funzioni $f \in C^1(A)$ tali che esistono e sono continue in A tutte le derivate parziali del secondo ordine

$$D_i D_j f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \in C(A), \quad i,j = 1,\dots,n.$$

La *matrice Hessiana* di una funzione $f \in C^2(A)$ è la matrice $n \times n$
$$D^2 f(x) = Hf(x) = \big(D_i D_j f(x)\big)_{i,j=1,\dots,n}.$$

Se $f \in C^2(A)$ allora per il Teorema di Schwarz le derivate miste coincidono
$$D_i D_j f = D_j D_i f, \quad i, j = 1, \dots, n.$$
Di conseguenza, la matrice Hessiana è simmetrica.

Definizione 9.4. Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ un insieme aperto. Per ogni $k \in \mathbb{N}$, definiamo $C^k(A)$ come l'insieme di tutte le funzioni $f : A \to \mathbb{R}$ tali che esistano e siano continue in A tutte le derivate parziali di ordine k
$$D_{i_1} \cdots D_{i_k} f = \frac{\partial^k}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_k}} \in C(A), \quad i_1, \dots, i_k \in \{1, \dots, n\}.$$
Definiamo quindi l'insieme delle funzioni con derivate parziali continue di ogni ordine
$$C^\infty(A) = \bigcap_{k=0}^{\infty} C^k(A).$$

Osservazione 9.5. Dal Teorema di Schwarz segue il seguente fatto. Se $f \in C^k(A)$, $k \geq 1$, allora
$$D_{i_1} \dots D_{i_k} f = D_{\sigma(i_1)} \dots D_{\sigma(i_k)} f$$
per ogni permutazione $\sigma : \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, n\}$ che fissa $\{1, \dots, n\} \setminus \{i_1, \dots, i_k\}$. In altri termini, è possibile scambiare a piacere l'ordine di derivazione.

10. Punti critici. Punti di massimo e minimo locale

In questa sezione presentiamo condizioni necessarie e condizioni sufficienti affinchè una funzione abbia punti di estremo locale.

Definizione 10.1 (Punto di estremo locale). Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ un insieme.

i) Un punto $x_0 \in A$ si dice punto di *massimo locale* di una funzione $f : A \to \mathbb{R}$ se esiste $r > 0$ tale che per ogni $x \in B_r(x_0) \cap A$ si ha
$$f(x) \leq f(x_0).$$
Se $f(x) < f(x_0)$ per ogni $x \in A \cap B_r(x_0) \setminus \{x_0\}$ diremo che x_0 è un punto di *massimo locale stretto.*

ii) Un punto $x_0 \in A$ si dice punto di *minimo locale* di una funzione $f : A \to \mathbb{R}$ se esiste $r > 0$ tale che per ogni $x \in B_r(x_0) \cap A$
$$f(x) \geq f(x_0).$$
Se $f(x) > f(x_0)$ per ogni $x \in A \cap B_r(x_0) \setminus \{x_0\}$ diremo che x_0 è un punto di *minimo locale stretto.*

I punti critici di una funzione sono i punti dove il gradiente si annulla.

Definizione 10.2 (Punto critico). Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ un insieme *aperto.* Un punto $x_0 \in A$ si dice *punto critico* di una funzione $f \in C^1(A)$ se $\nabla f(x_0) = 0$.

Prossimo obiettivo è di provare che i punti di estremo locale sono punti critici dove la matrice Hessiana è definita positiva oppure negativa. Abbiamo bisogno della formula di Taylor in più variabili.

Lemma 10.3 (Formula di Taylor del secondo ordine). Siano $A \subset \mathbb{R}^n$ un insieme aperto, $x_0 \in A$ ed $f \in C^2(A)$. Allora per ogni $x \in A$ tale che $[x_0, x] \subset A$ esiste un punto $z \in [x_0, x]$ tale che

$$f(x) = f(x_0) + \langle \nabla f(x_0), x - x_0 \rangle + \frac{1}{2} \langle Hf(z)(x - x_0), x - x_0 \rangle.$$

Dim. Sia $v = x - x_0$ e definiamo la funzione

$$\varphi(t) = f(x_0 + tv), \quad t \in [0, 1].$$

Chiaramente, $\varphi(0) = f(x_0)$, $\varphi(1) = f(x)$ e inoltre $\varphi \in C^2([0, 1])$. Per la formula dello sviluppo di Taylor nel caso 1-dimensionale per ogni $t \in [0, 1]$ esiste $\tau \in [0, t]$ tale che

$$\varphi(t) = \varphi(0) + \varphi'(0)t + \frac{1}{2} t^2 \varphi'(\tau), \tag{10.21}$$

Calcoliamo le derivate di φ. Per la formula della derivata della funzione composta

$$\varphi'(t) = \langle \nabla f(x_0 + tv), v \rangle = \sum_{i=1}^{n} f_{x_i}(x_0 + tv) v_i,$$

e inoltre

$$\varphi''(t) = \sum_{i,j=1}^{n} f_{x_i x_j}(x_0 + tv) v_i v_j = \langle Hf(x_0 + tv)v, v \rangle.$$

Scegliamo $t = 1$ nella formula (10.21) e sia $\tau \in [0, 1]$ il valore che renda vera la (10.21). Con la scelta $z = x_0 + \tau v$ otteniamo la tesi.

Osservazione 10.4. Nelle ipotesi del Lemma precedente si ha, con $v = x - x_0$

$$\begin{aligned} \langle Hf(z)(x - x_0), x - x_0 \rangle &= \langle Hf(x_0)v, v \rangle + \langle [Hf(z) - Hf(x_0)]v, v \rangle \\ &= \langle Hf(x_0)v, v \rangle + o(|v|^2), \quad v = x - x_0 \to 0, \end{aligned}$$

essendo $z \in [x_0, x]$ ed usando la continuità delle derivate parziali seconde.

Definizione 10.5 (Forme quadratiche (semi)definite). Sia B una matrice reale $n \times n$ simmetrica, $B = B^t$.

i) Diremo che B è semidefinita positiva se $\langle Bv, v \rangle \geq 0$ per ogni $v \in \mathbb{R}^n$. Scriveremo in questo caso $B \geq 0$.
ii) Diremo che B è definita positiva se $\langle Bv, v \rangle > 0$ per ogni $v \in \mathbb{R}^n$, $v \neq 0$. Scriveremo in questo caso $B > 0$.

Diremo che B è semidefinita negativa se $-B \geq 0$, che è definita negativa se $-B > 0$.

Lemma 10.6. Sia B una matrice reale $n \times n$ simmetrica. Sono equivalenti le seguenti affermazioni:

1) $B > 0$, ovvero B è definita positiva;
2) Esiste una costante $m > 0$ tale che $\langle Bv, v \rangle \geq m|v|^2$ per ogni $v \in \mathbb{R}^n$.

Dim. L'implicazione 2)⇒1) è chiara. Proviamo l'implicazione opposta. L'insieme $K = \{v \in \mathbb{R}^n : |v| = 1\}$ è compatto e la funzione $g : K \to \mathbb{R}$, $g(v) = \langle Bv, v \rangle$ è continua. Per il Teorema di Weierstrass esiste $v_0 \in K$ tale che

$$m = \min_{v \in K} g(v) = \langle Bv_0, v_0 \rangle > 0.$$

Ora, se $v \in \mathbb{R}^n$ con $v \neq 0$, avremo

$$\langle B\frac{v}{|v|}, \frac{v}{|v|}\rangle \geq m,$$

da cui segue la tesi per un generico v. □

Osservazione 10.7. Siano $\lambda_1 \leq \ldots \leq \lambda_n$ gli autovalori della matrice simmetrica B. Dal corso di Geometria 2 sappiamo che $B \geq 0$ se e solo se $\lambda_1 \geq 0$ e che $B > 0$ se e solo se $\lambda_1 > 0$. In effetti, risulta

$$\lambda_1 = m = \min_{|v|=1}\langle Bv, v\rangle.$$

Teorema 10.8 (Condizioni necessarie di estremalità). Sia $x_0 \in A$, con $A \subset \mathbb{R}^n$ aperto, un punto di minimo locale di una funzione $f \in C^2(A)$. Allora:

i) $\nabla f(x_0) = 0$ (condizione necessaria del primo ordine).
ii) $Hf(x_0) \geq 0$ (condizione necessaria del secondo ordine).

Dim. i) Esiste $r > 0$ tale $B_r(x_0) \subset A$ ed $f(x) \geq f(x_0)$ per $x \in B_r(x_0)$. Per $t \in \mathbb{R}$ con $|t| < r$ avremo $x_0 + te_i \in B_r(x_0)$; inoltre,

$$\frac{f(x_0 + te_i) - f(x_0)}{t} \geq 0 \quad \text{per } t > 0,$$

e

$$\frac{f(x_0 + te_i) - f(x_0)}{t} \leq 0 \quad \text{per } t < 0.$$

Passando al limite per $t \to 0$ si ottengono le disuguaglianze

$$f_{x_i}(x_0) = \lim_{t\to 0^+} \frac{f(x_0 + te_i) - f(x_0)}{t} \geq 0,$$

$$f_{x_i}(x_0) = \lim_{t\to 0^-} \frac{f(x_0 + te_i) - f(x_0)}{t} \leq 0,$$

da cui si deduce che $f_{x_i}(x_0) = 0$ per ogni $i = 1, \ldots, n$.

ii) Dalla formula di Taylor del secondo ordine con resto di Peano e dal fatto che $\nabla f(x_0) = 0$, per ogni $v \in \mathbb{R}^n$ e per ogni $t \in \mathbb{R}$ sufficientemente piccolo si ha la disuguaglianza

$$0 \leq f(x_0 + tv) - f(x_0) = \frac{t^2}{2}\langle Hf(x_0)v, v\rangle + o(t^2).$$

Dividendo per $t^2 > 0$ e facendo poi il limite per $t \to 0$ si deduce che

$$\langle Hf(x_0)v, v\rangle \geq 0.$$

□

Teorema 10.9 (Condizioni sufficienti per la minimalità locale). Siano $x_0 \in A$, $A \subset \mathbb{R}^n$ aperto, ed $f \in C^2(A)$. Supponiamo che:

i) $\nabla f(x_0) = 0$;
ii) $Hf(x_0) > 0$.

Allora x_0 è un punto di minimo locale stretto di f.

Dim. Sia $r > 0$ tale che $B_r(x_0) \subset A$, da fissare in modo definitivo in seguito. La funzione f ha lo sviluppo di Taylor

$$f(x) = f(x_0) + \frac{1}{2}\langle Hf(x_0)(x - x_0), x - x_0\rangle + o(|x - x_0|^2), \quad x \to x_0.$$

Abbiamo usato il fatto che $\nabla f(x_0) = 0$. Sia $m > 0$ la costante data dal Lemma 10.6. Allora

$$\frac{1}{2}\langle Hf(x_0)(x - x_0), x - x_0\rangle + o(|x - x_0|^2) \geq |x - x_0|^2\Big(\frac{m}{2} + o(1)\Big),$$

dove $o(1)$ è una funzione in x infinitesima per $x \to x_0$. Dunque esiste $r > 0$ tale che per $x \in B_r(x_0)$

$$\frac{m}{2} + o(1) \geq \frac{m}{4}.$$

Di conseguenza, se $0 < |x - x_0| < r$ si ha

$$f(x) - f(x_0) \geq |x - x_0|^2\Big(\frac{m}{2} + o(1)\Big) \geq \frac{m}{4}|x - x_0|^2 > 0.$$

Questo prova che x_0 è un punto di minimo locale stretto. □

11. Funzioni convesse

Un insieme $A \subset \mathbb{R}^n$ si dice *convesso* se per ogni coppia di punti $x, y \in A$ si ha

$$[x, y] = \big\{tx + (1 - t)y \in \mathbb{R}^n : t \in [0, 1]\big\} \subset A.$$

Una funzione $f : A \to \mathbb{R}$ si dice *convessa* se per ogni $x, y \in A$ e $t \in [0, 1]$ si ha

$$f(tx + (1 - t)y) \leq tf(x) + (1 - t)f(y).$$

La funzione si dice *strettamente convessa* se per ogni $x, y \in A$ con $x \neq y$, e per ogni $t \in (0, 1)$ si ha la disuguaglianza stretta

$$f(tx + (1 - t)y) < tf(x) + (1 - t)f(y).$$

La nozione di insieme convesso si formula in modo naturale negli spazi vettoriali. La nozione di funzione convessa si formula in modo naturale per funzioni a valori reali definite in un insieme convesso di uno spazio vettoriale.

Lasciamo il compito al lettore di verificare la seguente proposizione.

PROPOSIZIONE 11.1. Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ un insieme convesso e sia $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione. Sono equivalenti le seguenti affermazioni:

A) f è convessa;
B) l'epigrafico di f

$$\mathrm{epi}(f) = \big\{(x, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : x \in A,\, x_{n+1} > f(x)\big\}$$

è un insieme convesso in $\mathbb{R}^{n+1}$.

Anche la dimostrazione del seguente fatto è lasciata al lettore.

PROPOSIZIONE 11.2. Siano $A \subset \mathbb{R}^n$ un insieme convesso ed $f \in C(A)$ una funzione continua. Sono equivalenti le seguenti affermazioni:

A) f è convessa;

B) Per ogni coppia di punti $x, y \in A$ si ha

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2}f(y).$$

La dimostrazione della parte non banale B)⇒A) si basa sull'approssimazione di un generico $t \in [0,1]$ con successioni "diadiche" e su un'applicazione iterata della convessità del punto medio.

Richiamiamo, infine, il seguente teorema sulle funzioni convesse in dimensione $n = 1$.

Proposizione 11.3. Sia $\varphi : I \to \mathbb{R}$, con $I = [a,b] \subset \mathbb{R}$ intervallo, una funzione convessa. Allora:

i) Per ogni $y \in I$, la funzione

$$x \mapsto \frac{\varphi(x) - \varphi(y)}{x - y}, \quad x \in I \setminus \{y\}, \tag{11.22}$$

è crescente.

ii) Per ogni $a < \alpha < \beta < b$, φ è Lipschitziana su $[\alpha, \beta]$.

Vogliamo estendere questo teorema a dimensione generica $n \geq 1$. Per ogni $r > 0$ definiamo il cubo chiuso centrato in $0 \in \mathbb{R}^n$ di semilato $r > 0$

$$Q_r = \big\{x \in \mathbb{R}^n : |x_i| \leq r,\ i = 1, \ldots, n\big\}.$$

Teorema 11.4. Siano $0 < r < R$ e sia $f : Q_R \to \mathbb{R}$ una funzione convessa, $Q_R \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$. Allora esiste una costante $L \geq 0$ tale che per ogni $x, y \in Q_r$ si ha

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|.$$

Dim. Diamo la dimostrazione nel caso $n = 2$. Dalla Proposizione 11.3, parte ii), segue che $f \in C(\partial Q_r)$ e quindi esiste finito il minimo

$$m = \min_{x \in \partial Q_r} f(x) \in \mathbb{R}.$$

Inoltre, detti q_i, $i = 1, 2, 3, 4$, i quattro vertici del quadrato Q_R (i "punti estremali" di Q_R), dalla convessità di f segue che per ogni $x \in Q_R$ si ha $f(x) \leq \max\{f(q_i) : i = 1, 2, 3, 4\}$. Dunque esiste finito anche il seguente massimo

$$M = \max_{x \in \partial Q_R} f(x) = \max\{f(q_i) : i = 1, 2, 3, 4\}.$$

Dati $x, y \in Q_r$ con $x \neq y$, consideriamo la semiretta $L_{xy} = \big\{y + t(x - y) \in \mathbb{R}^n : t \geq 0\big\}$. Siano $\bar{x} \in \partial Q_R$ e $\bar{y} \in \partial Q_r$ punti tali che

$$L_{xy} \cap \partial Q_R = \{\bar{x}\}, \quad L_{xy} \cap \partial Q_r = \{\bar{y}\}.$$

Il punto $\bar{x}$ è definito in modo unico. Il punto $\bar{y}$ è definito in modo unico se x, y non sono su uno stesso lato di ∂Q_r. Usando due volte la monotonia (11.22), deduciamo che

$$\frac{f(x) - f(y)}{|x - y|} \leq \frac{f(\bar{x}) - f(y)}{|\bar{x} - y|} \leq \frac{f(\bar{x}) - f(\bar{y})}{|\bar{x} - \bar{y}|} \leq \frac{M - m}{R - r} = L.$$

Scambiando il ruolo di x ed y, otteniamo la tesi

$$\frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|} \leq L, \quad x, y \in Q_r,\, x \neq y.$$

□

Corollario 11.5. Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ un aperto convesso e sia $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione convessa. Allora esiste un insieme $E \subset A$ di misura nulla, $|E| = 0$, tale che f è differenziabile in ogni punto di $A \setminus E$.

Questo corollario segue dal Teorema di Rademacher e dal fatto che un aperto di $\mathbb{R}^n$ è un unione numerabile di cubi chiusi. Omettiamo i dettagli.

Caratterizziamo ora le funzioni convesse di classe $C^1(A)$ e di classe $C^2(A)$. Premettiamo la seguente osservazione. Se A è convesso e $x, y \in A$, allora l'insieme

$$I_{xy} = \{t \in \mathbb{R} : y + t(x - y) \in A\}$$

è un intervallo. Inoltre, una funzione $f : A \to \mathbb{R}$ è convessa se e solo se sono convesse le funzioni $\varphi_{xy} : I_{xy} \to \mathbb{R}$, $\varphi_{xy}(t) = f(y + t(x - y)\}$, per ogni $x, y \in A$.

Teorema 11.6. Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ un aperto convesso e sia $f \in C^1(A)$. Sono equivalenti le seguenti affermazioni:

A) f è convessa;
B) Per ogni $x, y \in A$ si ha $f(x) \geq f(y) + \langle \nabla f(y), x - y\rangle$;
C) Per ogni $x, y \in A$ si ha $\langle \nabla f(x) - \nabla f(y), x - y\rangle \geq 0$.

L'affermazione C) si può riassumere dicendo che l'applicazione $x \mapsto \nabla f(x)$è monotona (crescente).

Dim. A)⇒B). Siano $x, y \in A$. Dalla convessità di f deduciamo che per ogni $t \in (0, 1]$ si ha

$$\frac{f(y + t(x - y)) - f(y)}{t} \leq f(x) - f(y).$$

Passando al limite per $t \to 0^+$ e usando la regola per la derivata della funzione composta si ottiene la tesi.

B)⇒C) Basta sommare membro a membro le disuguaglianze

$$f(x) \geq f(y) + \langle \nabla f(y), x - y\rangle$$
$$f(y) \geq f(x) + \langle \nabla f(x), y - x\rangle$$

e poi semplificare.

C)⇒A) Consideriamo la funzione

$$\varphi_{xy}(t) = f(y + t(x - y)), \quad t \in I_{xy}.$$

Se proviamo che $t \mapsto \varphi'_{xy}(t)$ è crescente, segue che φ_{xy} è convessa. E dunque, f sarà convessa. Siano $s < t$, $z_t = y + t(x - y)$ e $z_s = y + s(y - x)$. Avremo allora

$$\varphi'_{xy}(t) - \varphi'_{xy}(s) = \langle \nabla f(z_t) - \nabla f(z_s), x - y\rangle \geq 0$$

in quando $y - x$ è un multiplo positivo di $z_t - z_s = (t - s)(x - y)$.

□

TEOREMA 11.7. Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ un aperto convesso e sia $f \in C^2(A)$. Sono equivalenti le seguenti affermazioni:

A) f è convessa;
B) $Hf(x) \geq 0$ per ogni $x \in A$.

Dim. A)$\Rightarrow$B) Fissati $x \in A$ e $v \in \mathbb{R}^n$, la funzione $t \mapsto \varphi(t) = f(x+tv)$ è convessa, e quindi $\varphi''(t) \geq 0$. In particolare, in $t = 0$ si trova

$$0 \leq \varphi''(0) = \langle Hf(x)v, v\rangle,$$

e quindi $Hf(x) \geq 0$.

B)$\Rightarrow$A). Dalla formula per lo sviluppo di Taylor di f, sappiamo che per ogni $x, y \in A$ esiste $z \in [x, y]$ tale che

$$f(x) = f(y) + \langle \nabla f(y), x - y\rangle + \frac{1}{2}\langle Hf(z)(x-y), x-y\rangle \geq f(y) + \langle \nabla f(y), x - y\rangle.$$

Questo termina la prova del Teorema. □

OSSERVAZIONE 11.8. La convessità è importante nello studio dei problemi di minimo.

1) Siano $A \subset \mathbb{R}^n$ un aperto convesso ed $f \in C^1(A)$ una funzione convessa. Se $x_0 \in A$ è un punto critico di f, allora è un punto di minimo globale (assoluto).

2) Siano $A \subset \mathbb{R}^n$ un insieme convesso ed $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione *strettamente* convessa. Se f ha un punto di minimo allora questo è unico.

Concludiamo lo studio delle funzioni convesse enunciando il Teorema di Alexandrov. Per una prova si veda Evans-Gariepy, *Measure Theory and Fine Properties of Functions*, p.242.

TEOREMA 11.9 (Alexandrov). Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una funzione convessa. Allora esistono funzioni $f_{ij} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $i, j = 1, \dots, n$, ed un insieme $E \subset \mathbb{R}^n$ di misura nulla, $|E| = 0$, tali che per ogni $x_0 \in \mathbb{R}^n \setminus E$ si ha, per $x \to x_0$,

$$f(x) = f(x_0) + \langle \nabla f(x_0), x - x_0\rangle + \frac{1}{2}\langle Hf(x_0)(x-x_0), x-x_0\rangle + o(|x-x_0|^2),$$

dove $Hf(x_0) = (f_{ij}(x_0))_{i,j=1,\dots,n}$ è la matrice Hessiana generalizzata di f. Inoltre, la matrice $Hf(x_0)$ è simmetrica.

12. Esercizi

12.1. Differenziabilità. Funzioni C^1.

Esercizio 43. In dipendenza da $\alpha \in \mathbb{R}$ si consideri la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = \begin{cases} (2x^2+y^2)^\alpha \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) & (x,y) \neq (0,0) \\ \\ 0 & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

1) Studiare la continuità e la differenziabilità di f al variare di α.
2) Stabilire se esistono α tali che f sia differenziabile su $\mathbb{R}^2$ ma non di classe $C^1(\mathbb{R}^2)$.

Esercizio 44. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^6}{x^6+y^8} & (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

1) Provare che f è continua su $\mathbb{R}^2$.
2) Stabilire se f è differenziabile in $(0,0)$.

Esercizio 45. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3y^2}{x^4+y^6} & (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

1) Provare che f è continua su $\mathbb{R}^2$.
2) Stabilire se f è differenziabile in $(0,0)$.

Esercizio 46. Costruire una funzione $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $n \geq 2$, tale che:

i) La derivata dirizionale $f_v(0)$ esiste finita per ogni $v \in \mathbb{R}^n$;
ii) La trasformazione $v \mapsto f_v(0)$ è lineare;
iii) f non è differenziabile in 0.

Esercizio 47. Costruire un esempio di funzione $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $n \geq 2$, tale che:

i) Per ogni $v \in \mathbb{R}^n$ con $|v| = 1$ esiste la derivata direzionale $f_v(0)$ e si ha
$$f(tv) = f(0) + tf_v(0) + E_v(t), \quad t \in \mathbb{R},$$
con $|E_v(t)| \leq E(t)$ per una funzione $E(t) = o(t)$ per $t \to 0$.
ii) f non è differenziabile in 0.

Esercizio 48. Una funzione $f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ si dice (positivamente) omogenea di grado $\alpha \in \mathbb{R}$ se $f(tx) = t^\alpha f(x)$ per ogni $x \neq 0$ e $t > 0$.

Provare che se $f \in C^1(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ è omogenea di grado α allora le sue derivate parziali sono omogenee di grado $\alpha - 1$. Verificare inoltre la formula di Eulero, per $x \neq 0$,

$$\langle \nabla f(x), x \rangle = \alpha f(x).$$

Esercizio 49. Sia $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$ e sia $f \in C(\bar{A}) \cap C^1(A)$ una funzione con derivate parziali f_x ed f_y uniformemente continue su A. Provare che esistono finite anche le seguenti derivate parziali al bordo

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x+t,0)-f(x,0)}{t} \quad \text{e}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y^+}(x,0) = \lim_{t\to 0^+} \frac{f(x,t)-f(x,0)}{t}.$$

Esercizio 50.

(1) Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la seguente funzione:

$$f(x,y) = \begin{cases} xy \sin\left(\frac{1}{xy}\right) & xy \neq 0, \\ 0 & xy = 0. \end{cases}$$

Provare che f è continua in $\mathbb{R}^2$ ma non è derivabile nel punto $(1,0)$.

(2) Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la seguente funzione:

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2y^2 \sin\left(\frac{1}{xy}\right) & xy \neq 0, \\ 0 & xy = 0. \end{cases}$$

Provare che f è differenziabile in ogni punto di $\mathbb{R}^2$ ma non è di classe $C^1(\mathbb{R}^2)$.

Esercizio 51. Sia $X = C([0,1])$ munito della sup-norma, e consideriamo l'applicazione $F : X \to \mathbb{R}$

$$F(\varphi) = \int_0^1 \varphi(t)^2 dt.$$

Provare che F è differenziabile in ogni punto $\varphi \in X$ e calcolare il differenziale $dF(\varphi) \in \mathcal{L}(X;\mathbb{R})$.

12.2. Funzioni C^2.

Esercizio 52. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

i) Stabilire se $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$;
ii) Stabilire se $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$.

Esercizio 53. Sia $f : A \to \mathbb{R}$, $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 < 1\}$, la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} xy(-\log(x^2+y^2))^{1/2}, & 0 < x^2+y^2 < 1, \\ 0 & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

i) Provare che $f \in C^1(A)$;
ii) Provare che esistono $f_{xx}, f_{yy} \in C(A)$;
iii) Stabilire se $f \in C^2(A)$.

Esercizio 54. Sia $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ la funzione $u(x) = |x|$. Provare che per $x \neq 0$ si ha $\det D^2u(x) = 0$.

Esercizio 55. Sia $\Delta : C^2(\mathbb{R}^n) \to C(\mathbb{R}^n)$ l'operatore differenziale del secondo ordine (operatore di Laplace)

$$\Delta = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}.$$

Verificare che la funzione $u(x) = |x|^{2-n}$, $x \neq 0$, verifica $\Delta u(x) = 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$. A patto che $n \geq 3$. La funzione u si dice *soluzione fondamentale* dell'equazione di Laplace.

12.3. Massimi/minimi.

Esercizio 56. Al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ si consideri la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x, y) = x^3 - y^3 + 3\alpha xy.$$

Determinare i punti critici di f ed eventuali punti di minimo/massimo locale/globale.

Esercizio 57. Siano $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq 2\pi\}$ ed $f : K \to \mathbb{R}$

$$f(x, y) = \sin(2x)\cos(y).$$

i) Provare che f assume massimo e minimo su K;
ii) Calcolare i punti critici di f in K e classificarli;
iii) Tracciare un grafico qualitativo di f;
iv) Determinare l'insieme immagine $f(K)$.

Esercizio 58. Sia $\alpha > 0$ un parametro fissato e consideriamo l'insieme

$$A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq \frac{1}{\alpha^2 + y^2}\right\}.$$

Provare che la funzione $f(x, y) = 2xy$ assume massimo su A e calcolarlo.

Esercizio 59. Sia $A \subset \mathbb{R}^2$ il più grande insieme su cui la funzione

$$f(x, y) = |x^2 - 2x| - \log(y^2 + x) + \log x$$

è ben definita.

i) Calcolare i punti di estremo di f in A e classificarli;
ii) Stabilire se f ha punti di sella in A.

Esercizio 60. Per $\alpha > 1$ sia $K \subset \mathbb{R}^2$ il triangolo chiuso di vertici $(0, 0), (\alpha + 1, 0), (0, \alpha + 1)$ e sia $f : K \to \mathbb{R}$ la funzione

$$f(x, y) = x^\alpha + y^\alpha + (2 + \alpha - x - y)^\alpha.$$

Calcolare l'immagine $f(K) \subset \mathbb{R}$.

Esercizio 61. Sia $K \subset \mathbb{R}^n$ un insieme compatto con interno non vuoto, $\mathrm{int}(K) \neq \emptyset$, e sia $f : K \to \mathbb{R}$ una funzione con queste proprietà: 1) f è continua su K; 2) f è differenziabile in $\mathrm{int}(K)$; f è costante su ∂K.

Dimostrare che esiste almeno un punto $x \in \mathrm{int}(K)$ tale che $\nabla f(x) = 0$.

12.4. Convessità.

Esercizio 62. Provare che se $A \subset \mathbb{R}^n$ è un insieme convesso, allora anche la chiusura $\bar{A}$ e l'interno $\mathrm{int}(A)$ sono convessi.

Esercizio 63. Siano $f_\alpha : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathcal{A}$, funzioni convesse. Supponiamo che per ogni $x \in \mathbb{R}^n$ si abbia

$$f(x) = \sup_{\alpha \in \mathcal{A}} f_\alpha(x) < \infty.$$

Provare che la funzione f è convessa.

Esercizio 64. Sia $f \in C^2(\mathbb{R}^n)$ una funzione tale che $Hf(x) > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}^n$. Provare che f è strettamente convessa. Mostrare anche che l'implicazione opposta non è vera.

Esercizio 65 (Disuguaglianza dei determinanti di Minkowski). Siano A, B due matrici $n \times n$ semidefinite positive. Provare che

$$\det(A + B)^{1/n} \geq \det(A)^{1/n} + \det(B)^{1/n}.$$

1) Discutere prima il caso $A = I$ matrice identità e $B = \Delta$ matrice diagonale. Usare il fatto che la funzione $t \mapsto \log(1 + \mathrm{e}^t)$ è (strettamente) convessa.
2) Discutere il caso $A > 0$ tramite una diagonalizzazione di $A^{-1}B$.

Esercizio 66. Sia $f \in C(\mathbb{R}^n)$ una funzione superlineare:

$$\lim_{|x| \to \infty} \frac{f(x)}{|x|} = \infty.$$

Definiamo la funzione $f^* : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ (la *trasformata di Legendre* di f)

$$f^*(\xi) = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \langle \xi, x \rangle - f(x), \quad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

1) Provare che il sup è un max.
2) Verificare che f^* è convessa.
3) Calcolare f^* nel caso $f(x) = \frac{1}{2}|x|^2$.

Esercizio 67. Sia $f \in C^2(\mathbb{R}^n)$ una funzione convessa e consideriamo l'applicazione $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $F(x) = \nabla f(x)$ con $x \in \mathbb{R}^n$. Provare che f è iniettiva sull'insieme

$$A = \{x \in \mathbb{R}^n : Hf(x) > 0\}.$$

ESERCIZIO 68. Sia $X = \{\varphi \in C^1([0,1]) : \varphi(0) = \alpha,\, \varphi(1) = \beta\}$ dove $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ sono due costanti fissate. Consideriamo il funzionale $F : X \to \mathbb{R}$

$$F(\varphi) = \int_0^1 \sqrt{1 + \varphi'(t)^2}\,dt.$$

1) Ammettendo che F assume il valore minimo, provare che F ha un *unico* punto di minimo.
2) Determinare il punto di minimo φ.

12.5. Esercizi vari.

ESERCIZIO 69. Sia $K \subset \mathbb{R}^n$ un chiuso non vuoto e definiamo la funzione distanza $d : \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$

$$d(x) = \mathrm{dist}(x; K) = \inf_{y \in K} |x - y|, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

1) Provare che l'inf è un min e che $\mathrm{Lip}(d) = 1$ (se $K \neq \mathbb{R}^n$).
2) Sia $x \in \mathbb{R}^n \setminus K$ un punto di differenziabilità di d. Provare che x ha proiezione metrica unica su K.
3) Provare che d^2 verifica la disuguaglianza di semiconcavità

$$d(x+h)^2 + d(x-h)^2 - 2d(x)^2 \leq 2|h|^2, \quad x, h \in \mathbb{R}^n.$$

ESERCIZIO 70. Sia $f : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Provare che il suo grafico $A = \big\{(x, y, f(x,y)) \in \mathbb{R}^3 : x, y \in [0,1]\big\} \subset \mathbb{R}^3$ ha misura nulla nello spazio.

ESERCIZIO 71. Siano (X, d) uno spazio metrico, $A \subset X$ e sia $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione uniformemente continua su A. Provare che per ogni $x_0 \in \bar{A}$ esiste finito il seguente limite

$$\bar{f}(x_0) = \lim_{x \to x_0} f(x).$$

In altri termini, f si estende in modo continuo su $\bar{A}$.

ESERCIZIO 72. Sia $K \subset \mathbb{R}^n$ un insieme chiuso. Costruire una funzione $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ tale che

$$K = \big\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) = 0\big\}.$$

ESERCIZIO 73. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione tale che esistano tutte le derivate parziali

$$\frac{\partial^{m+n} f}{\partial x^m \partial y^n}, \quad n, m \in \{0, 1, 2, \dots\}$$

in ogni punto di $\mathbb{R}^2$. È vero che f è allora necessariamente continua?

CAPITOLO 5

Equazioni differenziali ordinarie

1. Introduzione

Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+2}$, $n \in \mathbb{N}$, un insieme aperto e sia $F : \Omega \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Un'equazione della forma

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0 \tag{1.23}$$

si dice *equazione differenziale ordinaria di ordine n*. Qui, x è una variabile reale, y è una funzione incognita a valori reali e $y', \dots, y^{(n)}$ sono le sue derivate.

Una funzione $\varphi \in C^n(I)$ si dice *soluzione dell'equazione differenziale* (1.23) se:

i) $I \subset \mathbb{R}$ è un intervallo;
ii) $(x, \varphi(x), \dots, \varphi^{(n)}(x)) \in \Omega$ per ogni $x \in I$;
iii) $F(x, \varphi(x), \dots, \varphi^{(n)}(x)) = 0$ per ogni $x \in I$.

Le questioni più importanti sulle equazioni differenziali ordinarie sono:

1) L'esistenza di soluzioni.
2) L'unicità delle soluzioni, una volta fissate opportune condizioni iniziali o dati al bordo.
3) La regolarità delle soluzioni, ad esempio la dipendenza dai dati iniziali o dalla F, la stabilità per tempi grandi, etc.
4) Il calcolo esplicito delle soluzioni.

L'esistenza di soluzioni si prova con teoremi di punto fisso, con tecniche di approssimazione e compattezza, con metodi variazionali, con teoremi della funzione implicita, con strumenti di Analisi Funzionale.

Il problema dell'unicità è tipicamente più difficile. Solo in situazioni speciali è possibile calcolare le soluzioni in modo esplicito.

Osservazione 1.1 (Equazioni in forma normale). Nel caso che

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = y^{(n)} - f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$$

per qualche funzione $f : A \to \mathbb{R}$ con $A \subset \mathbb{R}^{n+1}$ aperto, l'equazione (1.23) diventa

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}). \tag{1.24}$$

Un'equazione della forma (1.24) si dice in *forma normale*.

Osservazione 1.2 (Equazioni di ordine n e sistemi di n equazioni). Trasformiamo l'equazione (1.24) in un *sistema* di equazioni. Se introduciamo le nuove funzioni incognite

$$z_i = y^{(i-1)}, \quad i = 1, \dots, n$$

allora avremo $z_i' = y^{(i)} = z_{i+1}$ per $i = 1, \dots, n-1$, mentre $z_n' = y^{(n)} = f(x, z_1, z_2, \dots, z_n)$. Quindi l'equazione differenziale di ordine n (1.24) è equivalente al *sistema di equazioni differenziali di ordine* 1

$$\begin{cases} z_1' = z_2 \\ z_2' = z_3 \\ \vdots \\ z_n' = f(x, z_1, z_2, \dots, z_n). \end{cases} \tag{1.25}$$

La discussione dei sistemi di ordine 1 è più generale della discussione delle equazioni di ordine n.

2. Equazioni differenziali lineari del primo ordine

Sia $I \subset \mathbb{R}$ un intervallo (ad esempio aperto) e siano $a, b \in C(I)$ due funzioni continue. Un'equazione differenziale della forma

$$y' + a(x)y = b(x), \quad x \in I, \tag{2.26}$$

si dice equazione lineare del primo ordine. Fissati $x_0 \in I$ e $y_0 \in \mathbb{R}$, possiamo prescrivere il valore della soluzione nel punto x_0:

$$y(x_0) = y_0. \tag{2.27}$$

Il problema di risolvere l'equazione differenziale (2.26) con la *condizione iniziale* (2.27) si chiama *Problema di Cauchy.* L'incognita del problema è una funzione $y \in C^1(I)$.

Dedurremo la formula risolutiva dell'equazione differenziale, e più in generale del Problema di Cauchy, con un argomento euristico. Consideriamo preliminarmente il caso $b = 0$:

$$y' + a(x)y = 0, \quad x \in I. \tag{2.28}$$

In questo caso, l'equazione differenziale si dice *omogenea.* Supponendo $y \neq 0$, ad esempio $y > 0$, l'equazione differenziale (2.28) si può riscrivere nella forma $y'/y = -a(x)$. Una primitiva della funzione y'/y è $\log y$. Dunque, indicando con A una primitiva di a, ovvero $A'(x) = a(x)$ per ogni $x \in I$, abbiamo

$$-A = \log y + d,$$

per qualche costante $d \in \mathbb{R}$. Segue che $y = \exp(-d - A)$ e ponendo $c = \mathrm{e}^{-d}$ troviamo la soluzione

$$y(x) = c\mathrm{e}^{-A(x)}, \quad x \in I. \tag{2.29}$$

Questa funzione risolve l'equazione omogenea per ogni $c \in \mathbb{R}$ (in altri termini la limitazione $y > 0$ può essere lasciata cadere).

Ora cerchiamo una soluzione della forma (2.29) per l'equazione non omogenea (2.26), dove ora $c \in C^1(I)$ è una funzione incognita che deve essere determinata. Questo metodo si chiama "variazione della costante". Inserendo $y' = c'\mathrm{e}^{-A} - ac\mathrm{e}^{-A}$ nell'equazione (2.26) otteniamo

$$c'\mathrm{e}^{-A} = b, \quad \text{ovvero} \quad c' = b\mathrm{e}^{A}.$$

Integrando tale equazione su un intervallo $(x_0, x) \subset I$ otteniamo

$$c(x) = c(x_0) + \int_{x_0}^{x} b(t)\mathrm{e}^{A(t)}dt,$$

e dunque troviamo

$$y(x) = \Big(c(x_0) + \int_{x_0}^{x} b(t)\mathrm{e}^{A(t)}dt\Big)\mathrm{e}^{-A(x)}, \quad x \in I, \tag{2.30}$$

dove $c(x_0) \in \mathbb{R}$ è un numero reale. Per ogni scelta di tale numero, la funzione (2.31) verifica l'equazione differenziale (2.26).

Il numero $c(x_0)$ si può determinare imponendo che l'integrale generale y verifichi la condizione iniziale $y(x_0) = y_0$. Si ottiene $c(x_0) = y_0\mathrm{e}^{A(x_0)}$. Dunque otteniamo la *formula di rappresentazione* per la soluzione del Problema di Cauchy:

$$y(x) = \Big(y_0\mathrm{e}^{A(x_0)} + \int_{x_0}^{x} b(t)\mathrm{e}^{A(t)}dt\Big)\mathrm{e}^{-A(x)}, \quad x \in I, \tag{2.31}$$

Nel prossimo teorema proviamo che il metedo seguito rileva in effetti l'*unica* soluzione del problema di Cauchy.

Teorema 2.1. Siano $I \subset \mathbb{R}$ un intervallo aperto, $x_0 \in I$, $a, b \in C(I)$ e $y_0 \in \mathbb{R}$. Allora la funzione (2.31) risolve in modo unico il Problema di Cauchy (2.26)+(2.27).

Dim. Che la funzione (2.31) risolva il problema è un conto che ripercorre a ritroso l'argomento euristico. Proviamo che questa soluzione è l'unica.

Sia $z \in C^1(I)$ una soluzione dell'equazione differenziale (2.26) e consideriamo la funzione ausiliaria

$$w(x) = \mathrm{e}^{A(x)}z(x) - \int_{x_0}^{x} b(t)e^{A(t)}dt,$$

dove A è una primitiva di a. Dal momento che sull'intervallo I risulta

$$w' = (az + z')\mathrm{e}^{A} - b\mathrm{e}^{A} = 0,$$

per il Teorema di Lagrange la funzione w è costante su I, ovvero esiste $k \in \mathbb{R}$ tale che $w(x) = k \in \mathbb{R}$ per ogni $x \in I$. Dunque, si ha

$$z(x) = \Big(k + \int_{x_0}^{x} b(t)e^{A(t)}dt\Big)\mathrm{e}^{-A(x)}.$$

D'altra parte, se z verifica anche la condizione iniziale $z(x_0) = y_0$ deve essere $k = y_0\mathrm{e}^{A(x_0)}$ e quindi z coincide con la funzione in (2.31). □

Esercizio 74. Al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ studiare esistenza e unicità della soluzione $y \in C^1(\mathbb{R})$ del problema

$$\begin{cases} x^3y' - y + 1 = 0, \\ y(0) = \alpha. \end{cases}$$

Soluzione. L'equazione differenziale è lineare del primo ordine. Tuttavia non è in forma normale. In particolare, il coefficiente di y' si annulla nel punto $x = 0$, proprio dove è assegnato il dato iniziale.

Calcoliamo tutte le soluzioni dell'equazione dove $x \neq 0$. L'equazione omogenea $x^3 y' = y$ ha le soluzioni

$$y(x) = c\mathrm{e}^{-\frac{1}{2x^2}}, \quad x \neq 0,$$

dove $c \in \mathbb{R}$ sono costanti. Cerchiamo una soluzione dell'equazione non omogenea della stessa forma, con $c = c(x)$ funzione da determinare. Derivando y e sostituendo nell'equazione si arriva all'identità

$$c'(x) = -\frac{1}{x^3}\mathrm{e}^{\frac{1}{2x^2}}, \quad x \neq 0.$$

Ora integriamo questa identità un un intervallo (x_0, x). La funzione che appare a destra non è integrabile in $x = 0$. Quindi l'intervallo di integrazione deve verificare $x, x_0 > 0$ oppure $x, x_0 < 0$. Integrando si ottiene

$$c(x) = c(x_0) - \int_{x_0}^{x} \frac{1}{t^3}\mathrm{e}^{\frac{1}{2t^2}}\, dt = k_1 + \mathrm{e}^{\frac{1}{2x^2}},$$

dove $k_1 \in \mathbb{R}$ è una costante. Siccome bisogna distinguere l'integrazione nel caso $x > 0$ e in quello $x < 0$, l'espressione generale per la funzione c è la seguente:

$$c(x) = \begin{cases} k_1 + \mathrm{e}^{\frac{1}{2x^2}}, & x > 0, \\ k_2 + \mathrm{e}^{\frac{1}{2x^2}}, & x < 0, \end{cases}$$

dove $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ sono due costanti indipendenti. Dunque, la soluzione generale dell'equazione differenziale è la seguente:

$$y(x) = \begin{cases} 1 + k_1\mathrm{e}^{-\frac{1}{2x^2}}, & x > 0, \\ 1 + k_2\mathrm{e}^{-\frac{1}{2x^2}}, & x < 0. \end{cases}$$

Dal momento che

$$\lim_{x \to 0} y(x) = 1$$

indipendentemente da k_1, k_2, tutte le funzioni y si prolungano con continuità in $x = 0$ ponendo $y(0) = 1$. La funzione risultante verifica in effetti $y \in C^1(\mathbb{R})$ con $y'(0) = 0$.

Arriviamo alle seguenti conclusioni:

1) Per $\alpha \neq 1$ il problema iniziale non ha soluzioni.
2) Per $\alpha = 1$ il problema ha infinite soluzioni, che dipendono da due parametri reali.

□

3. Equazioni differenziali a variabili separabili

Siano $I, J \subset \mathbb{R}$ due intervalli aperti e siano $f \in C(I)$ e $g \in C(J)$ due funzioni continue. Cerchiamo le soluzioni dell'equazione differenziale del primo ordine

$$y' = f(x)g(y), \quad x \in I, \tag{3.32}$$

per qualche intervallo $I_1 \subset I$. Una simile equazione si dice *a variabili separabili.* Eventualmente, fissati un punto $x_0 \in I$ e un valore $y_0 \in J$ possiamo prescrivere la condizione iniziale

$$y(x_0) = y_0. \tag{3.33}$$

Il problema (3.32)+(3.33) si chiama *Problema di Cauchy.*

Osserviamo preliminarmente che se $g(y_0) = 0$ allora la funzione costante $y(x) = y_0$, $x \in I$, è certamente una soluzione dell'equazione differenziale (3.32) che verifica la condizione iniziale.

Siccome vogliamo dividere per g, supponiamo che $g(y_0) \neq 0$. Allora risulta $g \neq 0$ in un intervallo aperto $J_1 \subset J$ che contiene y_0. Possiamo allora dividere e separare le variabili. L'equazione differenziale si riscrive nel seguente modo:

$$\frac{y'(x)}{g(y(x))} = f(x), \tag{3.34}$$

dove x varia in un intorno $I_1 \subset I$ del punto x_0 tale che $y(x) \in J_1$ per ogni $x \in I_1$.

Sia $G \in C^1(J_1)$ una primitiva di $1/g(y)$ (nella variabile y), definita nell'intervallo J_1 dove risulta $g \neq 0$. La funzione G è strettamente monotona, perchè $G'(y) \neq 0$, e pertanto G è invertibile.

Sia poi $F \in C^1(I)$ una primitiva di f. Integrando l'equazione differenziale (3.34) si ottiene

$$G(y(x)) = F(x) + C, \quad x \in I_1. \tag{3.35}$$

Qui, $C \in \mathbb{R}$ è una costante che può essere determinata tramite la condizione iniziale, e precisamente $C = G(y_0) - F(x_0)$.

La soluzione del Problema di Cauchy è dunque

$$y(x) = G^{-1}(F(x) - F(x_0) + G(y_0)), \quad x \in I_1, \tag{3.36}$$

dove $G^{-1} : G(J_1) \to J_1$ è la funzione inversa di G. L'intervallo $I_1 \subset I$ è in generale più piccolo di I.

Il precedente argomento rileva due tipi di soluzione dell'equazione differenziale (3.32): le soluzioni costanti e le soluzioni per cui $g(y) \neq 0$. Potrebbero, tuttavia, esserci altre soluzioni. Se $g \neq 0$ su J, l'argomento prova che la soluzione è necessariamente della forma (3.36).

Teorema 3.1. Siano $I, J \subset \mathbb{R}$ due intervalli aperti, $x_0 \in I$ e $y_0 \in J$, e siano $f \in C(I)$, $g \in C(J)$ tali che $g \neq 0$ su J. Allora il Problema di Cauchy (3.32)+(3.33) ha una soluzione unica $y \in C^1(I_1)$ data dalla formula (3.36), per qualche intervallo aperto $I_1 \subset I$ contenente x_0.

La dimostrazione del teorema è contenuta nell'argomento precedente.

Esempio 3.2. Cerchiamo la soluzione del Problema di Cauchy seguente

$$\begin{cases} y' = \dfrac{1+2x}{\cos y} \\ y(0) = \pi. \end{cases} \tag{3.37}$$

L'equazione differenziale è a variabili separabili $y' = f(x)g(y)$ con $f(x) = 1 + 2x$ e $g(y) = 1/\cos y$. In particolare, g è definita per $\cos y \neq 0$, ovvero per $y \neq \pi/2 + k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$. Siccome vogliamo che g sia definita su un intervallo, tenuto conto della condizione iniziale dovremo considerare $g : (\pi/2, 3\pi/2) \to \mathbb{R}$. Chiaramente $g \neq 0$.

Separando le variabili otteniamo $y' \cos y = 1 + 2x$, e integrando troviamo la soluzione generale in forma implicita dell'equazione differenziale

$$\sin y = x + x^2 + C,$$

dove $C \in \mathbb{R}$ è una costante che si determina con la condizione iniziale $y(0) = \pi$, ovvero $C = \sin y(0) = 0$.

Ora dobbiamo invertire la relazione $\sin y = x + x^2$. Osserviamo che l'inversione "meccanica"

$$z(x) = \arcsin(x + x^2)$$

non fornisce la soluzione del problema (3.37) perchè $z(0) = \arcsin(0) = 0$ e la condizione iniziale non è verificata.

Per determinare la soluzione corretta osserviamo che la funzione arcsin è l'inversa della funzione sin ristretta all'intervallo $[-\pi/2, \pi/2]$. Nel nostro caso, tuttavia, y prende valori in un intorno di π. Allora, ponendo $w(x) = y(x) - \pi$, abbiamo $w(0) = y(0) - \pi = 0$ e $\sin w = \sin(y - \pi) = -\sin y = -(x + x^2)$. Siccome w assume valori in un intorno di 0, è ora lecito invertire la funzione seno e otteniamo $w = -\arcsin(x + x^2)$ e quindi

$$y(x) = \pi - \arcsin(x + x^2).$$

Questa è la soluzione del problema, che è definita nell'intervallo aperto

$$I_1 = \{x \in \mathbb{R} : x + x^2 < 1\}.$$

Dalla formula esplicita della soluzione, o anche direttamente dall'equazione differenziale si deduce che la soluzione y è decrescente in un intorno di $x = 0$. In effetti, $y'(x) < 0$ se e solo se $1 + 2x > 0$, ovvero $x > -1/2 \in I_1$.

Esempio 3.3 (Esempio di Peano). Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = 2\sqrt{|y(x)|}, & x \in \mathbb{R}, \\ y(0) = 0 \end{cases} \tag{3.38}$$

Osserviamo che la funzione $f(y) = 2\sqrt{|y|}$ non è Lipschitziana in un intorno di $y = 0$.

La funzione identicamente nulla $y = 0$ è una soluzione. Questa, tuttavia, non è l'unica soluzione. Una seconda soluzione può essere trovata separando le variabili: $2 = y'/\sqrt{|y|}$. Integrando tale equazione sull'intervallo fra 0 e $x \in \mathbb{R}$ troviamo

$$2x = \int_0^x \frac{y'(t)}{\sqrt{|y(t)|}} dt = \int_0^{y(x)} \frac{1}{\sqrt{|z|}} dz = \begin{cases} 2\sqrt{y(x)}, & \text{se } y(x) > 0 \\ -2\sqrt{-y(x)}, & \text{se } y(x) < 0. \end{cases}$$

Nel cambiamento di variabili $z = y(t)$ abbiamo usato la condizione iniziale $y(0) = 0$. In questo modo, troviamo la soluzione $y \in C^1(\mathbb{R})$

$$y(x) = \begin{cases} x^2 & \text{if } x \geq 0, \\ -x^2 & \text{if } x < 0. \end{cases}$$

D'altra parte, per ogni coppia di numeri reali $\alpha \leq 0 \leq \beta$, la funzione

$$y_{\alpha\beta}(x) = \begin{cases} (x - \beta)^2 & \text{if } x \geq \beta, \\ 0 & \text{if } \alpha < x < \beta, \\ -(x - \alpha)^2 & \text{if } x \leq \alpha \end{cases}$$

è di classe $C^1(\mathbb{R})$ e risolve il Problema di Cauchy (3.38). Dunque c'è un "continuo" di soluzioni noto come il "pennello di Peano".

Fra tutte queste soluzioni se ne possono selezionare due speciali: quella massima, che è $y_+(x) = 0$ per $x \leq 0$ e $y(x) = x^2$ per $x \geq 0$; e quella minima, che è $y_-(x) = -x^2$

per $x \le 0$ e $y(x) = 0$ per $x \ge 0$. Per ogni punto del piano $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ tale che $y_-(x_0) \le y_0 \le y_+(x_0)$ esiste una soluzione y del Problema di Cauchy (3.38) tale che $y(x_0) = y_0$. Il "pennello di Peano" ricopre tutta la regione del piano compresa fra la soluzione massima e quella minima.

4. Altre classi di equazioni

Esempio 4.1 (Equazioni di tipo omogeneo). Un'equazione differenziale con la seguente struttura

$$y' = f\Big(\frac{y}{x}\Big)$$

si dice di tipo omogeneo. Qui, $f : I \to \mathbb{R}$ è una funzione (continua) su un intervallo $I \subset \mathbb{R}$. Con il cambiamento di variabile funzionale $y = xz$, dove z è la nuova funzione incognita, si ottiene $y' = z+xz'$ e l'equazione differenziale si trasforma nella equazione a variabili separabili

$$xz' + z = f(z).$$

Esempio 4.2 (Equazione di Bernoulli). Un'equazione differenziale con la struttura

$$y' + a(x)y = b(x)y^\alpha, \quad x \in I, \tag{4.39}$$

dove α è un parametro reale tale che $\alpha \neq 0, 1$ si dice di Bernoulli. Ponendo

$$y = z^{\frac{1}{1-\alpha}}, \quad y' = \frac{1}{1-\alpha} z^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} z',$$

l'equazione si trasforma nella seguente equazione lineare

$$z' + (1-\alpha)a(x)z = (1-\alpha)b(x).$$

Esempio 4.3 (Dinamica delle popolazioni). Supponiamo che una certa popolazione $p > 0$ evolva secondo la legge

$$\dot p(t) = \gamma p(t)\Big\{1 - \Big(\frac{p(t)}{K}\Big)^\vartheta\Big\}, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{4.40}$$

dove $\dot p(t) = \frac{dp(t)}{dt}$ e $t \in \mathbb{R}$ è la variabile temporale. Qui, $\gamma, \vartheta, K > 0$ sono parametri fissati.

L'equazione (4.40) è un tipico esempio di equazione di popolazione. L'equazione è di Bernoulli e può essere integrata esplicitamente.

5. Problema di Cauchy: Esistenza e unicità locale di soluzioni nell'ipotesi Lipschitz

In $\mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, $n \ge 1$, introduciamo le coordinate $x \in \mathbb{R}$ and $y \in \mathbb{R}^n$. Sia poi $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ un insieme aperto e sia $f \in C(\Omega; \mathbb{R}^n)$ una funzione continua. Dato un punto $(x_0, y_0) \in \Omega$ consideriamo il *Problema di Cauchy*

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0. \end{cases} \tag{5.41}$$

Abbiamo un *sistema* di n equazioni differenziali del primo ordine con la condizione iniziale $y(x_0) = y_0$.

Una funzione $y \in C^1(I; \mathbb{R}^n)$ si dice soluzione del problema se:

i) $I \subset \mathbb{R}$ è un intervallo (aperto) tale che $x_0 \in I$;

ii) $(x, y(x)) \in \Omega$ per ogni $x \in I$;
iii) $y'(x) = f(x, y(x))$ per ogni $x \in I$ (l'equazione differenziale è verificata);
iv) $y(x_0) = y_0$ (il dato iniziale viene assunto).

Integrando l'equazione differenziale $y' = f(x, y)$ sull'intervallo con estremi x_0 e x otteniamo l'equazione integrale

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\, dt = Ty(x), \tag{5.42}$$

dove $y \mapsto Ty$ è un'applicazione definita in un opportuno spazio funzionale. Una soluzione del Problema di Cauchy è dunque un punto fisso dell'applicazione T. D'altra parte, se una funzione continua y risolve l'equazione di punto fisso (5.42) allora y è di classe C^1 per il Teorema fondamentale del calcolo integrale e risolve il Problema di Cauchy (5.41).

Fissiamo lo spazio funzionale. Per $\delta > 0$, si consideri lo spazio vettoriale reale

$$V = C([x_0 - \delta, x_0 + \delta]; \mathbb{R}^n). \tag{5.43}$$

Sappiamo che V munito della sup-norma

$$\|y\| = \max_{x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]} |y(x)|, \quad y \in V, \tag{5.44}$$

è uno spazio di Banach. Per ogni $\varepsilon > 0$, il sottoinsieme X di V

$$X = \big\{ y \in V : y(x_0) = y_0,\ \|y - y_0\| \leq \varepsilon \big\} \tag{5.45}$$

è chiuso in quanto entrambe le condizioni $y(x_0) = y_0$ e $\|y - y_0\| \leq \varepsilon$ sono conservate dalla convergenza uniforme (in effetti basta quella puntuale). Di conseguenza, lo spazio metrico (X, d) è completo rispetto alla distanza $d(y, z) = \|y - z\|$.

Vedremo che per un'opportuna scelta di δ ed ε l'applicazione $T : X \to X$

$$Ty(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\, dt \tag{5.46}$$

è ben definita, ovvero risulta effettivamente $Ty \in X$ per ogni $y \in X$.

Definizione 5.1. Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ un insieme aperto. Diciamo che una funzione $f \in C(\Omega; \mathbb{R}^n)$ è localmente di Lipschitz in y se per ogni compatto $K \subset \Omega$ esiste una costante $L > 0$ tale che

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L|y_1 - y_2| \tag{5.47}$$

per ogni $(x, y_1), (x, y_2) \in K$.

Teorema 5.2 (Esistenza e unicità locale). Siano $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ un insieme aperto, $(x_0, y_0) \in \Omega$, e sia $f \in C(\Omega; \mathbb{R}^n)$ una funzione localmente di Lipschitz in y. Allora esiste $\delta > 0$ tale che il Problema di Cauchy (5.41) ha una soluzione unica $y \in C^1(I; \mathbb{R}^n)$ nell'intervallo $I = [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$. Inoltre, la scelta di δ è uniforme per (x_0, y_0) in un compatto di Ω.

Dim. Siano $\delta > 0$ ed $\varepsilon > 0$ tali che $K = [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \times \{y \in \mathbb{R}^n : |y - y_0| \leq \varepsilon\} \subset \Omega$. Sia $H \subset \Omega$ un insieme compatto tale che $K \subset \operatorname{int}(H)$. Dal momento che f è continua su H, il numero

$$M = \sup_{(x,y) \in H} |f(x, y)| < \infty$$

è finito. Sia X l'insieme introdotto in (5.45) e sia T l'applicazione (5.46). Per ogni $y \in X$ abbiamo, per ogni $x \in I$,

$$|Ty(x) - y_0| \leq \Big| \int_{x_0}^{x} |f(t, y(t))| dt \Big| \leq M|x - x_0| \leq \delta M.$$

In effetti, risulta $(t, y(t)) \in K \subset H$ per ogni $t \in I$. Scegliendo eventualmente una costante $\delta > 0$ più piccola (questa scelta non modifica M), possiamo supporre che $\delta M \leq \varepsilon$. Con una tale scelta, si ha $Ty \in X$ per ogni $y \in X$. Quindi $T : X \to X$ è ben definita. La scelta di $\delta > 0$ è indipendente da x_0 e y_0, fintanto che $K \subset \mathrm{int}(H)$.

Dimostriamo che l'applicazione $T : X \to X$ ha un unico punto fisso. È sufficiente mostrare che esiste $k \in \mathbb{N}$ tale che l'applicazione iterata T^k è una contrazione. Siano $y, \bar{y} \in X$ e $x \in I$. Abbiamo (ad esempio con $x \geq x_0$)

$$\begin{aligned}
|Ty(x) - T\bar{y}(x)| &= \Big| \int_{x_0}^{x} \big(f(t, y(t)) - f(t, \bar{y}(t) \big) dt \Big| \\
&\leq \int_{x_0}^{x} |f(t, y(t)) - f(t, \bar{y}(t)| dt \\
&\leq L \int_{x_0}^{x} |y(t) - \bar{y}(t)| dt \leq L|x - x_0| \cdot \|y - \bar{y}\|.
\end{aligned}$$

Qui, L è la costante di Lipschitz per f relativa al compatto H. Analogamente, si ha

$$\begin{aligned}
|T^2 y(x) - T^2 \bar{y}(x)| &= \Big| \int_{x_0}^{x} (f(t, Ty(t)) - f(t, T\bar{y}(t)) dt \Big| \\
&\leq L \int_{x_0}^{x} |Ty(t) - T\bar{y}(t)| dt \\
&\leq L^2 \|y - \bar{y}\| \int_{x_0}^{x} (t - x_0) dt \leq L^2 \frac{(x - x_0)^2}{2} \|y - \bar{y}\|.
\end{aligned}$$

Per induzione, troviamo per ogni $k \in \mathbb{N}$ e $x \in I$

$$|T^k y(x) - T^k \bar{y}(x)| \leq \frac{L^k |x - x_0|^k}{k!} \|y - \bar{y}\|,$$

e questo implica

$$\|T^k y - T^k \bar{y}\| \leq \frac{(L\delta)^k}{k!} \|y - \bar{y}\|.$$

Dal momento che

$$\lim_{k \to \infty} \frac{(L\delta)^k}{k!} = 0,$$

allora esiste $k \in \mathbb{N}$ tale che

$$\frac{(L\delta)^k}{k!} < 1.$$

Per un tale k, l'applicazione T^k è una contrazione. Allora T ha un unico punto fisso $y \in X$. Inoltre, risulta $y \in C^1([x_0 - \delta, x_0 + \delta]; \mathbb{R}^n)$ e y risolve il Problema di Cauchy (5.41). $\square$

Osservazione 5.3. Sia $f \in C(\Omega;\mathbb{R}^n)$ una funzione tale che esistano continue le derivate parziali

$$\frac{\partial f_i}{\partial y_j} \in C(\Omega), \quad i,j = 1,\dots,n.$$

Allora la funzione f è localmente di Lipschitz in y. Supponiamo ad esempio che sia $\Omega = \mathbb{R}^{n+1}$ e consideriamo un compatto $K = [a,b] \times \{y \in \mathbb{R}^n : |y - y_0| \le r\}$ per qualche $-\infty < a < b < \infty$, $y_0 \in \mathbb{R}^n$ ed $r > 0$. Se $(x,y_1),(x,y_2) \in K$ allora per il Teorema del valor medio esiste $t^* \in [0,1]$ tale che

$$\begin{aligned} f_i(x,y_1) - f_i(x,y_2) &= \langle \nabla_y f_i(x, y_1 + t^*(y_2 - y_1)), y_2 - y_1 \rangle \\ &\le |\nabla_y f_i(x, y_1 + t^*(y_2 - y_1))||y_2 - y_1| \le M|y_2 - y_1|, \end{aligned}$$

dove ∇_y indica il gradiente nelle sole variabili y e

$$M = \max_{(x,y)\in K} |\nabla_y f_i(x,y)| < \infty,$$

e l'affermazione segue.

6. Soluzioni massimali e criterio di prolungamento

Sia $f \in C(\Omega;\mathbb{R}^n)$ una funzione che verifica la condizione di Lipschitz (5.47) e sia $(x_0,y_0) \in \Omega$.

Proposizione 6.1. Nelle ipotesi del Teorema 5.2, siano I_1 e I_2 due intervalli aperti contenenti x_0 e supponiamo che $y_1 \in C^1(I_1;\mathbb{R}^n)$ e $y_2 \in C^1(I_2;\mathbb{R}^n)$ siano soluzioni del Problema di Cauchy (5.41). Allora abbiamo $y_1 = y_2$ su $I_1 \cap I_2$.

Dim. L'insieme $A = \{x \in I_1 \cap I_2 : y_1(x) = y_2(x)\}$ è relativamente chiuso in $I_1 \cap I_2$ in quanto y_1 e y_2 sono continue. Mostriamo che A è anche aperto in $I_1 \cap I_2$. Dal momento che $I_1 \cap I_2$ è connesso, seguirà che $A = I_1 \cap I_2$.

Siano dunque $\bar{x}_0 \in A$ e $\bar{y}_0 = y_1(\bar{x}_0) = y_2(\bar{x}_0)$. Per il Teorema 5.2 esiste un $\delta > 0$ tale che il Problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(\bar{x}_0) = \bar{y}_0 \end{cases} \tag{6.48}$$

ha una soluzione unica $y \in C^1(I;\mathbb{R}^n)$ con $I = [\bar{x}_0 - \delta, \bar{x}_0 + \delta]$. Per $\delta > 0$ piccolo, si ha $I \subset I_1 \cap I_2$. Segue allora che $y = y_1 = y_2$ in I, e perciò $I \subset A$. □

Sia $\mathcal{A}$ l'insieme di tutte le coppie (J, y_J) dove $J \subset \mathbb{R}$ è un intervallo aperto che contiene x_0 e $y_J \in C^1(J;\mathbb{R}^n)$ è una soluzione del Problema di Cauchy (5.41). Per il Teorema 5.2, abbiamo $\mathcal{A} \neq \emptyset$.

Sia $I \subset \mathbb{R}$ l'intervallo $I = \bigcup J$, dove l'unione è fatta su tutti gli intervalli J tali che $(J, y_J) \in \mathcal{A}$. Sia $y \in C^1(I;\mathbb{R}^n)$ la funzione definita da

$$y(x) = y_J(x) \quad \text{se} \quad x \in J. \tag{6.49}$$

La funzione y è ben definita in quanto per la Proposizione 6.1 si ha $y_J = y_{J'}$ su $J \cap J'$. Inoltre, y è una soluzione del Problem di Cauchy (5.41).

Definizione 6.2 (Soluzione massimale). La funzione y definita in (6.49) si chiama *soluzione massimale* del Problema di Cauchy (5.41).

TEOREMA 6.3 (Criterio di prolungamento). Siano $I = (a_0, b_0) \subset \mathbb{R}$ un intervallo aperto con $-\infty < a_0 < b_0 < \infty$, $\Omega = I \times \mathbb{R}^n$, e sia $f \in C(\Omega; \mathbb{R}^n)$ una funzione che verifica la proprietà di Lipschitz locale in y. Se $y \in C^1((a, b); \mathbb{R}^n)$ è la soluzione massimale del Problema di Cauchy (5.41), per qualche intervallo $(a, b) \subset (a_0, b_0)$, allora deve valere almeno una delle seguenti due affermazioni (o entrambe):

i) $b = b_0$; oppure:
ii) $\lim\limits_{x \uparrow b} |y(x)| = \infty$.

C'è un'affermazione analoga relativa al punto a.

Dim. Per assurdo, supponiamo che $b < b_0$ e che esista una successione $x_k \in (a, b)$, $k \in \mathbb{N}$, tale che

$$\lim_{k\to\infty} x_k = b \quad \text{e} \quad \sup_{k\in\mathbb{N}} |y(x_k)| \le M_0,$$

per qualche costante finita $M_0 < \infty$. Ponendo $\bar{y}_k = y(x_k) \in \mathbb{R}^n$ ed eventualmente estraendo una sottosuccessione possiamo supporre che

$$\lim_{k\to\infty} \bar{y}_k = \bar{y}_0$$

per qualche $\bar{y}_0 \in \mathbb{R}^n$.

Studiamo il seguente Problema di Cauchy

$$\begin{cases} z'(x) = f(x, z(x)) \\ z(x_k) = \bar{y}_k. \end{cases} \tag{6.50}$$

Fissiamo un compatto $H \subset \Omega$ tale che $(b, \bar{y}_0) \in \mathrm{int}(H)$ e poniamo

$$M = \max_{(x,y)\in H} |f(x, y)| < \infty.$$

Per un opportuno $\varepsilon > 0$ e per ogni $k \in \mathbb{N}$ sufficientemente grande, l'insieme compatto

$$K = [x_k, 2b - x_k] \times \{y \in \mathbb{R}^n : |y - \bar{y}_k| \le \varepsilon\}$$

è contenuto in H. Consideriamo lo spazio funzionale

$$X = \big\{z \in C([x_k, 2b - x_k]; \mathbb{R}^n) : z(x_k) = \bar{y}_k,\ \|z - \bar{y}_k\| \le \varepsilon\big\}.$$

Se $k \in \mathbb{N}$ è sufficientemente grande, abbiamo anche $2(b - x_k)M \le \varepsilon$. Quindi, l'operatore integrale

$$Tz(x) = \bar{y}_k + \int_{x_k}^{x} f(t, z(t))dt$$

trasforma X in se stesso, ovvero $T : X \to X$. Come nella dimostrazione del Teorema 5.2, un'opportuna iterazione di T è una contrazione su X e pertanto per il Teorema 3.3 esiste un'unica soluzione $z \in C^1([x_k, 2b - x_k]; \mathbb{R}^n)$ del Problema di Cauchy (6.50).

D'altra parte, la funzione y risolve il medesimo Problema di Cauchy sull'intervallo $[x_k, b)$ e per l'unicità deve essere $y = z$ su $[x_k, b)$. Questo prova che y può essere prolungata come soluzione del Problema di Cauchy (5.41) oltre b. Questo contraddice la massimalità di y. □

7. Lemma di Gronwall e soluzioni globali

In questa sezione proviamo un teorema di esistenza globale delle soluzioni di equazioni differenziali nel caso che la funzione f verifichi una condizione di crescita al più lineare, si veda (7.53). A tale scopo occorre la seguente proposizione, nota come Lemma di Gronwall.

LEMMA 7.1. Siano $I \subset \mathbb{R}$ un intervallo, $x_0 \in I$ e $\varphi \in C(I)$ una funzione continua non negativa, $\varphi \geq 0$. Se esistono $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, con $\alpha, \beta \geq 0$, tali che

$$\varphi(x) \leq \alpha + \beta \int_{x_0}^{x} \varphi(t)\, dt, \quad \text{per ogni } x \in I \text{ con } x \geq x_0, \tag{7.51}$$

allora

$$\varphi(x) \leq \alpha \mathrm{e}^{\beta(x-x_0)} \quad \text{per ogni } x \in I \text{ con } x \geq x_0. \tag{7.52}$$

Dim. Sia $\Phi : I \to \mathbb{R}$ la funzione

$$\Phi(x) = \alpha + \beta \int_{x_0}^{x} \varphi(t)\, dt, \quad x \in I.$$

Risulta $\Phi \in C^1(I)$ ed inoltre $\Phi'(x) = \beta\varphi(x)$ per ogni $x \in I$, per il Teorema fondamentale del calcolo. Dalla (7.51) segue che $\Phi'(x) \leq \beta\Phi(x)$ per $x \in I$, dal momento che $\beta \geq 0$. La funzione $\Psi(x) = \mathrm{e}^{-\beta(x-x_0)}\Phi(x)$ verifica allora

$$\Psi'(x) = -\beta \mathrm{e}^{-\beta(x-x_0)}\Phi(x) + \mathrm{e}^{-\beta(x-x_0)}\Phi'(x) = \mathrm{e}^{-\beta(x-x_0)}\big(-\beta\Phi(x) + \Phi'(x)\big) \leq 0$$

e $\Psi(x_0) = \Phi(x_0) = \alpha$. Segue che $\Psi(x) \leq \alpha$ per $x \geq x_0$, ovvero

$$\Phi(x) \leq \alpha \mathrm{e}^{\beta(x-x_0)}$$

per ogni $x \in I$ con $x \geq x_0$. Questo implica (7.52), dal momento che $\varphi(x) \leq \Phi(x)$, per la (7.51). □

TEOREMA 7.2 (Soluzioni globali). Siano $I = (a_0, b_0)$ con $-\infty \leq a_0 < b_0 \leq \infty$, $\Omega = I \times \mathbb{R}^n$, e sia $f \in C(\Omega; \mathbb{R}^n)$ una funzione continua con la proprietà di Lipschitz locale in y (5.47). Supponiamo che per ogni compatto $K \subset I$ esista una costante $C \geq 0$ tale che

$$|f(x, y)| \leq C(1 + |y|), \quad \text{per ogni } x \in K \text{ e } y \in \mathbb{R}^n. \tag{7.53}$$

Allora il Problema di Cauchy (5.41), con $x_0 \in I$ e $y_0 \in \mathbb{R}^n$, ha un'unica soluzione globale definita su tutto I.

Dim. Sia $y \in C^1(J; \mathbb{R}^n)$ la soluzione massimale del Problema di Cauchy (5.41), con $J = (a, b) \subset I$. Supponiamo per assurdo che $b < b_0$. Allora, per il Teorema 6.3 si ha

$$\lim_{x \uparrow b} |y(x)| = \infty. \tag{7.54}$$

Siano $K = [x_0, b]$ e $C > 0$ tali che valga la (7.53). Dall'identità

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt, \quad x \in J,$$

otteniamo per $x \in J$ con $x \geq x_0$

$$|y(x)| \leq |y_0| + C\int_{x_0}^{x}(1+|y(t)|)dt \leq |y_0| + C(b-x_0) + C\int_{x_0}^{x}|y(t)|\,dt.$$

Dal Lemma di Gronwall segue che

$$|y(x)| \leq \big\{|y_0| + C(b-x_0)\big\}\mathrm{e}^{C(x-x_0)}, \quad x \in (x_0, b),$$

e perciò la (7.54) non può valere. □

Esempio 7.3 (Sistemi lineari). Sia $A(x)$ una matrice reale $n \times n$ che dipende da $x \in I$ in modo continuo, dove $I \subset \mathbb{R}$ è un intervallo aperto. Il Problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = A(x)y \\ y(x_0) = y_0, \end{cases}$$

con $x_0 \in I$ e $y_0 \in \mathbb{R}^n$, ha una soluzione unica $y \in C^1(I)$. Infatti, la funzione $f : I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

$$f(x,y) = A(x)y$$

è continua e per ogni compatto $K \subset I$ verifica per $x \in K$ ed $y_1, y_2 \in \mathbb{R}^n$

$$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| = |A(x)y_1 - A(x)y_2| \leq \|A(x)\||y_1-y_2| \leq \max_{x\in K}\|A(x)\||y_1-y_2|.$$

Le ipotesi del Teorema 5.2 di esistenza e di unicità locale sono dunque verificate. Inoltre si ha $|f(x,y)| = |A(x)y| \leq \max_{x\in K}\|A(x)\||y|$ per ogni $x \in K$ e $y \in \mathbb{R}^n$. Dunque, anche l'ipotesi (7.53) del Teorema 7.2 è soddisfatta. Questo assicura l'esistenza globale.

Esempio 7.4. Sia $\alpha > 0$ e consideriamo il Problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = |y|^{1+\alpha} \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

La funzione $f(y) = |y|^{1+\alpha}$ è di classe $C^1(\mathbb{R})$ e quindi le ipotesi del Teorema di esistenza e unicità locale della soluzione sono verificate. Sia $I = (a,b) \subset \mathbb{R}$ l'intervallo di definizione della soluzione massimale. Si ha $y(x) \neq 0$ per ogni $x \in I$. Se, infatti, esistesse $\bar{x} \in I$ tale che $y(\bar{x}) = 0$, allora y sarebbe soluzione del Problema di Cauchy

$$\begin{cases} z' = |z|^{1+\alpha} \\ z(\bar{x}) = 0, \end{cases}$$

che però avrebbe come unica soluzione la funzione identicamente nulla $z = 0$. Questa sarebbe una contraddizione.

Siccome la soluzione y del problema iniziale è stettamente crescente, segue che $0 < y(x) < 1$ per ogni $x \in I$ con $x < 0$. Dal Criterio di prolungamento 6.3 deduciamo che $a = -\infty$.

In effetti, la soluzione y si calcola esplicitamente separando le variabili

$$x = \int_0^x \frac{y'(t)}{y(t)^{1+\alpha}}dt = \int_1^{y(x)} \frac{dz}{z^{\alpha+1}} = \frac{1}{\alpha}\Big(1 - \frac{1}{y^\alpha}\Big),$$

da cui si ottiene la soluzione

$$y(x) = \frac{1}{\sqrt[\alpha]{1-\alpha x}}, \quad \text{definita per } x < b = \frac{1}{\alpha}.$$

A causa dell'andamento superlineare di $f(y) = |y|^{1+\alpha}$ la soluzione del Problema di Cauchy esplode in tempo finito. Si noti che $b \to \infty$ quando $\alpha \to 0$.

8. Equazioni differenziali lineari del secondo ordine

Questa parte è esclusa dal programma e verrà ripresa in Analisi 2B.

Sia $I \subset \mathbb{R}$ un intervallo aperto e siano $a, b, f \in C(I)$ funzioni continue. In questa sezione studiamo l'equazione differenziale lineare del secondo ordine:

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = f(x), \quad x \in I.$$

L'incognita è una funzione $y \in C^2(I)$. L'equazione differenziale si dice lineare perchè l'operatore differenziale $\mathcal{L} : C^2(I) \to C(I)$

$$\mathcal{L}(y) = y'' + a(x)y' + b(x)y$$

è un operatore lineare.

La dimostrazione del seguente teorema di esistenza e unicità della soluzione per il Problema di Cauchy segue direttamente dai Teoremi 5.2 e 7.2. Si veda anche l'Esempio 7.3.

Teorema 8.1. Siano $I \subset \mathbb{R}$ un intervallo aperto, $x_0 \in I$ e $y_0, y_0' \in \mathbb{R}$, e siano $a, b, f \in C(I)$ funzioni continue. Allora il Problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + a(x)y' + b(x)y = f(x), \quad x \in I, \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_0' \end{cases} \tag{8.55}$$

ha un'unica soluzione $y \in C^2(I)$.

Studiamo ora il caso omogeneo $f = 0$. Consideriamo l'insieme delle soluzioni dell'equazione omogenea

$$S = \big\{ y \in C^2(I) : y'' + a(x)y' + b(x)y = 0 \text{ su } I \big\}.$$

Dal teorema precedente segue il seguente fatto.

Proposizione 8.2. L'insieme S delle soluzioni dell'equazione omogenea è uno spazio vettoriale reale di dimensione 2.

Dim. S è uno spazio vettoriale, perchè per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $y_1, y_2 \in S$, ovvero $\mathcal{L}(y_1) = \mathcal{L}(y_2) = 0$, risulta

$$\mathcal{L}(\alpha y_1 + \beta y_2) = \alpha \mathcal{L}(y_1) + \beta \mathcal{L}(y_2) = 0,$$

e quindi $\alpha y_1 + \beta y_2 \in S$.

Proviamo che S ha dimensione esattamente 2. Fissato un punto $x_0 \in I$, definiamo la trasformazione $T : S \to \mathbb{R}^2$ definita nel seguente modo

$$T(y) = \big(y(x_0), y'(x_0)\big).$$

La trasformazione T è lineare. Proviamo che T è iniettiva e suriettiva. Ne segue che S ed $\mathbb{R}^2$ sono linearmente isomorfi e dunque $\dim(S) = \dim(\mathbb{R}^2) = 2$.

Prova dell'iniettività: se $T(y) = T(z)$ con $y, z \in S$ allora y e z risolvono lo stesso Problema di Cauchy (8.55) (con $f = 0$). Siccome per il Teorema 8.1 la soluzione del problema è unica, deve essere $y = z$.

Prova della suriettività: dato $(y_0, y_0') \in \mathbb{R}^2$, dal Teorema 8.1 segue l'esistenza di $y \in S$ tale che $T(y) = (y_0, y_0')$.

Dunque, lo spazio vettoriale S ha una base vettoriale composta da due soluzioni. Consideriamo due soluzioni $y_1, y_2 \in S$ (non necessariamente linearmente indipendenti). Formiamo la *matrice Wronskiana*

$$W_{y_1,y_2}(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_2'(x) & y_2'(x) \end{pmatrix},$$

e il *determinante Wronskiano*

$$w(x) = \det \begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_2'(x) & y_2'(x) \end{pmatrix} = y_1(x)y_2'(x) - y_2(x)y_1'(x).$$

Chiaramente risulta $w \in C^1(I)$ e inoltre

$$\begin{aligned} w' &= y_1'y_2' - y_2'y_1' + y_1y_2'' - y_2y_1'' \\ &= y_1(-a(x)y_2' - b(x)y_2) - y_2(-a(x)y_1' - b(x)y_1) \\ &= -a(x)w. \end{aligned}$$

Integrando l'equazione differenziale scopriamo che il determinante Wronskiano ha la forma

$$w(x) = w(x_0)\exp\Big(-\int_{x_0}^{x} a(t)dt\Big), \quad x \in I.$$

In particolare, se $w(x_0) = 0$ in un punto $x_0 \in I$ allora $w = 0$ in tutti i punti.

Proposizione 8.3. Siano $y_1, y_2 \in S$ soluzioni dell'equazione omogenea e sia $w = \det W_{y_1,y_2}$ il corrispondente determinante Wronskiano. Allora:

(A) y_1, y_2 sono linearmente dipendenti se e solo se esiste $x_0 \in I$ tale che $w(x_0) = 0$ (equivalentemente se e solo se $w = 0$ su I);

(B) y_1, y_2 sono linearmente indipendenti se e solo se esiste $x_1 \in I$ tale che $w(x_1) \neq 0$ (equivalentemente se e solo so $w \neq 0$ su I).

Dim. Proviamo (A). Se y_1, y_2 sono linearmente dipendenti allora esistono $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, tali che $\alpha y_1 + \beta y_2 = 0$ su I. Derivando vale anche $\alpha y_1' + \beta y_2' = 0$ su I, e dunque

$$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_2' & y_2' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Segue che $w = 0$ su tutto I.

Supponiamo ora che $w(x_0) = 0$ in un punto $x_0 \in I$. Allora, esistono $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$ tali che

$$\begin{pmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_2'(x_0) & y_2'(x_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

La funzione $z = \alpha y_1 + \beta y_2$ è in S e verifica $z(x_0) = 0$ e $z'(x_0) = 0$. Dall'unicità della soluzione per il Problema di Cauchy segue che $z = 0$ e quindi y_1, y_2 sono linermente dipendenti.

L'affermazione (B) segue da (A) per negazione.

8.1. Metodo della variazione delle costanti. In questa sezione illustriamo il metodo per calcolare una soluzione dell'equazione non omogenea

$$y'' + a(x)y + b(x)y = f(x), \quad x \in I, \tag{8.56}$$

una volta si sappia risolvere l'equazione omogenea corrispondente. Sia y_1, y_2 una base di soluzioni per l'equazione omogenea $y''+a(x)y+b(x)y = 0$. Cerchiamo una soluzione del tipo

$$y = c_1y_1 + c_2y_2 \tag{8.57}$$

dove $c_1, c_2 : I \to \mathbb{R}$ sono funzioni da determinare. Derivando la relazione si ottiene

$$y' = c_1'y_1 + c_1y_1' + c_2'y_2 + c_2y_2'.$$

Imponendo la condizione

$$c_1'y_1 + c_2'y_2 = 0 \tag{8.58}$$

l'espressione precedente si riduce alla seguente

$$y' = c_1y_1' + c_2y_2'.$$

Derivando nuovamente si ottiene

$$y'' = c_1'y_1' + c_1y_1'' + c_2'y_2' + c_2y_2''.$$

Sostituendo nell'equazione differenziale di partenza, dopo qualche calcolo, si arriva alla seguente equazione

$$c_1(y_1'' + ay_1' + by_1) + c_2(y_2'' + ay_2' + by_2) + c_1'y_1' + c_2'y_2' = f.$$

Usando il fatto che y_1, y_2 risolvono l'equazione omogenea si ottiene la seconda condizione

$$c_1'y_1' + c_2'y_2' = f. \tag{8.59}$$

Mettendo a sistema le condizioni (8.58) e (8.59) si arriva al sistema

$$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1' \\ c_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ f \end{pmatrix}.$$

Nel sistema è apparsa la matrice Wronskiana di y_1, y_2. Per la Proposizione 8.3, questa matrice è invertibile in ogni punto $x \in I$. Questo permette di risolvere il sistema in c_1' e c_2':

$$\begin{pmatrix} c_1' \\ c_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ f \end{pmatrix}.$$

Le due equazioni del sistema possono essere integrate. Questo procedimento determina c_1 e c_2 a meno di due costanti addittive che appaiono nel processo di integrazione. Una volta sostituite c_1 e c_2 nella (8.57), le due costanti possono essere determinate con delle eventuali condizioni iniziali.

8.2. Equazioni lineari del secondo ordine a coefficienti costanti. Consideriamo un'equazione differenziale del tipo

$$y'' + ay' + by = 0 \tag{8.60}$$

dove $a, b \in \mathbb{R}$ sono costanti. Si cercano soluzioni della forma $y(x) = \mathrm{e}^{\lambda x}$, dove $\lambda \in \mathbb{C}$ è un parametro complesso. Sostituendo le derivate $y' = \lambda \mathrm{e}^{\lambda x}$ e $y'' = \lambda^2 \mathrm{e}^{\lambda x}$ nell'equazione differenziale si ottiene l'equazione

$$\mathrm{e}^{\lambda x}(\lambda^2 + a\lambda + b) = 0.$$

Siccome $\mathrm{e}^{\lambda x} \neq 0$, tale equazione è verificata se e solo se λ verifica l'*equazione caratteristica*:

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0.$$

Sia $\Delta = a^2 - 4b$ il discriminante dell'equazione. Si possono presentare tre casi.

1) $\Delta > 0$. L'equazione caratteristica ha due soluzioni reali distinte

$$\lambda_1 = \frac{-a - \sqrt{\Delta}}{2} \quad \text{e} \quad \lambda_2 = \frac{-a + \sqrt{\Delta}}{2}.$$

In questo caso, la soluzione generale y di (8.60) è una combinazione lineare delle soluzioni $y_1(x) = \mathrm{e}^{\lambda_1 x}$ e $y_2(x) = \mathrm{e}^{\lambda_2 x}$, che sono linearmente indipendenti:

$$y(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}, \quad x \in \mathbb{R}$$

dove $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

2) $\Delta < 0$. L'equazione caratteristica ha due soluzioni complesse coniugate

$$\lambda_1 = \frac{-a + i\sqrt{-\Delta}}{2} = \alpha + i\beta \quad \text{e} \quad \lambda_2 = \frac{-a - i\sqrt{-\Delta}}{2} = \alpha - i\beta$$

dove si è posto $\alpha = -a/2$ e $\beta = \sqrt{-\Delta}/2$. Le funzioni

$$\begin{aligned} z_1(x) &= \mathrm{e}^{(\alpha+i\beta)x} = \mathrm{e}^{\alpha x}\mathrm{e}^{i\beta x} = \mathrm{e}^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x) \\ z_2(x) &= \mathrm{e}^{(\alpha-i\beta)x} = \mathrm{e}^{\alpha x}\mathrm{e}^{-i\beta x} = \mathrm{e}^{\alpha x}(\cos\beta x - i\sin\beta x) \end{aligned}$$

sono soluzioni a valori complessi dell'equazione differenziale. Dunque, le funzioni

$$\begin{aligned} y_1(x) &= \frac{z_1(x) + z_2(x)}{2} = \mathrm{e}^{\alpha x}\cos\beta x \\ y_2(x) &= \frac{z_1(x) - z_2(x)}{2i} = \mathrm{e}^{\alpha x}\sin\beta x \end{aligned}$$

sono soluzioni a valori reali dell'equazione differenziale. Le funzioni y_1 e y_2 sono linearmente indipendenti e dunque la soluzione generale dell'equazione differenziale è della forma

$$y(x) = (c_1\cos\beta x + c_2\sin\beta x)\mathrm{e}^{\alpha x}$$

con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

3) $\Delta = 0$. L'equazione caratteristica ha la soluzione reale $\lambda = -a/2$ con molteplicità 2. In questo caso, il metodo produce una sola soluzione $y_1(x) = \mathrm{e}^{\lambda x}$. Un conto diretto mostra che la funzione $y_2(x) = x\mathrm{e}^{\lambda x}$ è pure una soluzione che è linearmente indipendente dalla precedente. In effetti, si ha:

$$\begin{aligned} y_2'' + ay_2' + by_2 &= 2\lambda\mathrm{e}^{\lambda x} + \lambda^2 x\mathrm{e}^{\lambda x} + a\big(\mathrm{e}^{\lambda x} + \lambda x\mathrm{e}^{\lambda x}\big) + bx\mathrm{e}^{\lambda x} \\ &= (\lambda^2 + a\lambda + b)x\mathrm{e}^{\lambda x} + (2\lambda + a)e^{\lambda x} = 0, \end{aligned}$$

dove nell'ultimo passaggio si è usato il fatto che che λ risolve l'equazione caratteristica e che $\lambda = -a/2$.

La soluzione generale dell'equazione (8.60) è dunque

$$y(x) = (c_1 + c_2 x)\mathrm{e}^{\lambda x}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

8.3. Equazioni del secondo ordine di Eulero. Sia $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione continua su un intervallo $I \subset \mathbb{R}^+$ e siano $a, b, c \in \mathbb{R}$ numeri reali tali che $a \neq 0$. L'equazione differenziale

$$ax^2 y'' + bxy' + cy = f(x), \quad x \in I, \tag{8.61}$$

è un'equazione del secondo ordine di Eulero. Consideriamo il caso $f = 0$, ovvero il caso omogeneo,

$$ax^2 y'' + bxy' + cy = 0, \quad x \in \mathbb{R}^+. \tag{8.62}$$

L'equazione è singolare in $x = 0$ in quanto il coefficiente di y'' si annulla. Cerchiamo soluzioni sulla semiretta $\mathbb{R}^+ = (0, +\infty)$. Dal momento che l'equazione differenziale è lineare, le soluzioni formano uno spazio vettoriale di dimensione 2. Cerchiamo due soluzioni linearmente indipendenti della forma

$$y(x) = x^\lambda = \mathrm{e}^{\lambda \log(x)} = \mathrm{e}^{(\alpha + i\beta)\log x} = x^\alpha(\cos(\beta \log x) + i \sin(\beta \log x)),$$

dove $\lambda = \alpha + i\beta$ è un parametro complesso. Inserendo y, $y' = \lambda x^{\lambda - 1}$, e $y'' = \lambda(\lambda - 1)x^{\lambda - 2}$ nella (8.62) si trova $x^\lambda(a\lambda(\lambda - 1) + b\lambda + c) = 0$. Dal momento che $x^\lambda \neq 0$, λ risolve l'equazione caratteristica

$$a\lambda^2 + (b - a)\lambda + c = 0. \tag{8.63}$$

A seconda del segno di $\Delta = (b - a)^2 - 4ac$ si distinguono tre casi.

Caso 1: $\Delta > 0$. In questo caso l'equazione caratteristica ha due soluzioni semplici $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ e la soluzione generale dell'equazione omogenea (8.62) è

$$y(x) = C_1 x^{\lambda_1} + C_2 x^{\lambda_2},$$

dove $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ sono costanti reali.

Caso 2: $\Delta = 0$. In questo caso, l'equazione caratteristica ha una soluzione reale doppia $\lambda \in \mathbb{R}$ e troviamo la soluzione $y_1(x) = x^\lambda$. Una verifica diretta mostra che la funzione $y_2(x) = x^\lambda \log x$ è una soluzione che è linearmente indipendente dalla prima. La soluzione generale dell'equazione omogenea (8.62) è dunque

$$y(x) = x^\lambda(C_1 + C_2 \log x),$$

dove $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ sono costanti reali.

Caso 3: $\Delta < 0$. In questo caso l'equazione caratteristica ha due soluzioni complesse fra loro coniugate

$$\lambda_1 = \alpha + i\beta \quad \text{and} \quad \lambda_2 = \alpha - i\beta.$$

Otteniamo le soluzioni a valori complessi

$$z_1(x) = x^{\alpha+i\beta} = x^\alpha\big(\cos(\beta\log x) + i\sin(\beta\log x)\big),$$
$$z_2(x) = x^{\alpha-i\beta} = x^\alpha\big(\cos(\beta\log x) - i\sin(\beta\log x)\big),$$

e quindi le soluzioni reali

$$y_1(x) = \frac{1}{2}(z_1(x) + z_2(x)) = x^\alpha\cos(\beta\log x),$$
$$y_2(x) = \frac{1}{2i}(z_1(x) - z_2(x)) = x^\alpha\sin(\beta\log x).$$

La soluzione generale dell'equazione omogenea è dunque

$$y(x) = x^\alpha\big(C_1\cos(\beta\log x) + C_2\sin(\beta\log x)\big),$$

dove $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ sono costanti reali.

9. Regolarità della soluzione rispetto ai dati iniziali

9.1. Continuità della soluzione rispetto ai dati. Siano $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ un insieme aperto ed $f \in C(\Omega;\mathbb{R}^n)$ una funzione che è localmente di Lipschitz in y. Fissiamo un punto $(x_0, y_0) \in \Omega$ e per $(\xi, \eta) \in \Omega$ consideriamo il Problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)) \\ y(\xi) = \eta. \end{cases} \tag{9.64}$$

Esistono dei numeri $\delta > 0$ ed $r > 0$ tali che per ogni $(\xi, \eta) \in B_r(x_0, y_0) \subset \Omega$ il Problema di Cauchy ha una soluzione unica $y_{\xi\eta} \in C^1(I;\mathbb{R}^n)$ dove $I = [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ è un intervallo fissato. Possiamo anche supporre che esista $h > 0$ tale che

$$|y_{\xi\eta}(x) - y_0| \le h$$

per ogni $(\xi, \eta) \in B_r(x_0, y_0)$ e per ogni $x \in I$, e tale che si abbia

$$K = I \times \bar{B}_h(y_0) \subset \Omega.$$

L'insieme K è compatto e il grafico di una qualsiasi soluzione è contenuto in K.

Definiamo la costante

$$M = \max_{(x,y)\in K} |f(x, y)| < \infty,$$

e sia $L > 0$ una costante di Lipschitz per f relativa a K

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \le L|y_1 - y_2|, \quad \text{per ogni } (x, y_1), (x, y_2) \in K.$$

Teorema 9.1 (Kamke). Con le ipotesi e notazioni precedenti, sia $y_{\xi\eta} \in C^1(I;\mathbb{R}^n)$ la soluzione del Problema di Cauchy (9.64) e sia $y_{x_0y_0} \in C^1(I;\mathbb{R}^n)$ la soluzione con dato iniziale $y(x_0) = y_0$. Allora si ha la convergenza uniforme

$$\lim_{\xi\to x_0, \eta\to y_0} \max_{x\in I} |y_{\xi\eta}(x) - y_{x_0y_0}(x)| = 0. \tag{9.65}$$

Dim. Formiamo la differenza fra le soluzioni

$$
\begin{aligned}
y_{\xi\eta}(x) - y_{x_0y_0}(x) &= \eta - y_0 + \int_\xi^x f(t, y_{\xi\eta}(t))dt - \int_{x_0}^x f(t, y_{x_0y_0}(t))dt \\
&= \eta - y_0 + \int_\xi^{x_0} f(t, y_{\xi\eta}(t))dt + \int_{x_0}^x \{f(t, y_{\xi\eta}(t)) - f(t, y_{x_0y_0}(t))\}dt.
\end{aligned}
$$

Per la disuguaglianza triangolare si ha (ad esempio con $\xi \le x_0 \le x$)

$$
\begin{aligned}
|y_{\xi\eta}(x) - y_{x_0y_0}(x)| &\le |\eta - y_0| + \int_\xi^{x_0} |f(t, y_{\xi\eta}(t))|dt + \int_{x_0}^x |f(t, y_{\xi\eta}(t)) - f(t, y_{x_0y_0}(t))|dt \\
&\le |\eta - y_0| + M|\xi - x_0| + L\int_{x_0}^x |y_{\xi\eta}(t) - y_{x_0y_0}(t)|dt.
\end{aligned}
$$

Ora il Lemma di Gronwall implica che

$$
|y_{\xi\eta}(x) - y_{x_0y_0}(x)| \le (|\eta - y_0| + M|\xi - x_0|)e^{L|x-x_0|},
$$

per ogni $x \in I$, e la convergenza uniforme segue. □

Vogliamo definire il "flusso" indotto dall'equazione differenziale. Siano $I = [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ e $B = B_r(x_0, y_0)$, come sopra. Definiamo la funzione $\Phi : I \times B \to \Omega \subset \mathbb{R}^n$ ponendo

$$
\Phi(x, \xi, \eta) = y_{\xi\eta}(x). \tag{9.66}
$$

Proviamo che Φ è continua su $I \times B$, ad esempio che è continua nel punto $(x_0, \xi_0, \eta_0) \in I \times B$. Fissiamo $\varepsilon > 0$ e stimiamo la differenza

$$
|\Phi(x, \xi, \eta) - \Phi(x_0, \xi_0, \eta_0)| \le |\Phi(x, \xi, \eta) - \Phi(x, \xi_0, \eta_0)| + |\Phi(x, \xi_0, \eta_0) - \Phi(x_0, \xi_0, \eta_0)|.
$$

Per il Teorema di Kamke esiste $\delta_1 > 0$ indipendente da $x \in I$ tale che

$$
|\Phi(x, \xi, \eta) - \Phi(x, \xi_0, \eta_0)| \le \varepsilon/2
$$

per ogni ξ, η tali che $|\xi - \xi_0| \le \delta_1$ e $|\eta - \eta_0| \le \delta_1$. Inoltre esiste $\delta_2 > 0$ tale che

$$
|\Phi(x, \xi_0, \eta_0) - \Phi(x_0, \xi_0, \eta_0)| \le \varepsilon/2
$$

per ogni $x \in I$ tale che $|x - x_0| \le \delta_2$. Infatti la funzione $x \mapsto \Phi(x, \xi_0, \eta_0)$ è continua. Questo prova la continuità di Φ.

9.2. Dipendenza C^1 della soluzione dai dati. Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ un insieme aperto e sia $f \in C(\Omega; \mathbb{R}^n)$ una funzione tale che esistano continue le derivate parziali

$$
\frac{\partial f(x, y)}{\partial y_i} \in C(\Omega; \mathbb{R}^n), \quad i = 1, \dots, n. \tag{9.67}
$$

In particolare, f è localmente di Lipschitz in y. Sia $\Phi : I \times B \to \Omega$ il "flusso" definito in (9.66). Vogliamo provare che sotto l'ipotesi (9.67) Φ è di classe C^1.

Prima di enunciare il risultato, calcoliamo in modo formale le derivate di $y_{\xi\eta}$. Innanzitutto si ha

$$
\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \xi} y_{\xi\eta}(x) = \frac{\partial}{\partial \xi}\frac{\partial}{\partial x} y_{\xi\eta}(x) = \frac{\partial}{\partial \xi} f(x, y_{\xi\eta}(x)) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y_{\xi\eta}(x))\frac{\partial}{\partial \xi} y_{\xi\eta}(x).
$$

In questo conto stiamo supponendo che sia lecito scambiare le derivate $\frac{\partial}{\partial x}$ e $\frac{\partial}{\partial \xi}$. Con $\partial f/\partial y$ abbiamo indicato la matrice Jacobiana di f relativa alle variabili y.

Calcoliamo ora $\partial y_{\xi\eta}/\partial\xi(x)$ nel punto $x = \xi$. Dal fatto che $y_{\xi\eta}(\xi) = \eta$ per ogni $\xi \in I$, segue che la derivata della funzione $\xi \mapsto y_{\xi\eta}(\xi)$ si annulla identicamente. Dunque, per la regola della derivata della funzione composta, si ottiene

$$0 = \frac{\partial y_{\xi\eta}}{\partial\xi}(\xi) + \frac{\partial y_{\xi\eta}(x)}{\partial x}\Big|_{x=\xi} = \frac{\partial y_{\xi\eta}}{\partial\xi}(\xi) + f(\xi, y_{\xi\eta}(\xi)).$$

In definitiva, la funzione $\psi_{\xi\eta} : I \to \mathbb{R}^n$

$$\psi_{\xi\eta}(x) = \frac{\partial y_{\xi\eta}(x)}{\partial\xi}, \quad x \in I,$$

è la soluzione del Problema di Cauchy lineare

$$\begin{cases} \psi'(x) = F_{\xi\eta}(x)\psi(x) \\ \psi(\xi) = -f(\xi, y_{\xi\eta}(\xi)), \end{cases} \tag{9.68}$$

dove $F_{\xi\eta} \in C(I; M_n(\mathbb{R}))$ è la funzione a valori matrici $n \times n$

$$F_{\xi\eta}(x) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y_{\xi\eta}(x)). \tag{9.69}$$

Il Problema (9.68) ha una soluzione unica definita su I.

Calcoliamo le derivate di $y_{\xi\eta}$ rispetto alle variabili η. Per ogni $i = 1, \ldots, n$ si ha

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial\eta_i} y_{\xi\eta}(x) = \frac{\partial}{\partial\eta_i}\frac{\partial}{\partial x} y_{\xi\eta}(x) = \frac{\partial}{\partial\eta_i} f(x, y_{\xi\eta}(x)) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y_{\xi\eta}(x))\frac{\partial}{\partial\eta_i} y_{\xi\eta}(x).$$

Inoltre, dall'identità $y_{\xi\eta}(\xi) = \eta$ valida per $\xi \in I$ si ottiene

$$\frac{\partial y_{\xi\eta}}{\partial\eta_i}(\xi) = \mathrm{e}_i = (0, \ldots, 1, \ldots, 0).$$

In definitiva, la funzione $\varphi_{\xi\eta,i} : I \to \mathbb{R}^n$

$$\varphi_{\xi\eta,i}(x) = \frac{\partial y_{\xi\eta}}{\partial\eta_i}(x)$$

è la soluzione del Problema di Cauchy lineare

$$\begin{cases} \varphi_i'(x) = F_{\xi\eta}(x)\varphi_i(x), \quad x \in I, \\ \varphi_i(\xi) = e_i. \end{cases} \tag{9.70}$$

Teorema 9.2. Siano $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ un insieme aperto, $(x_0, y_0) \in \Omega$ ed $f \in C(\Omega; \mathbb{R}^n)$ sia una funzione che verifica (9.67). Per $\delta > 0$ siano $I = [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ e $B = \{y \in \mathbb{R}^n : |y - y_0| \le \delta\}$. Allora esiste $\delta > 0$ tale che la funzione $\Phi : I \times I \times B \to \mathbb{R}^n$

$$\Phi(x, \xi, \eta) = y_{\xi\eta}(x),$$

dove $y_{\xi\eta} \in C^1(I; \mathbb{R}^n)$ è la soluzione del Problema (9.64), è di classe $C^1(I \times I \times B; \mathbb{R}^n)$. Inoltre,

$$\frac{\partial\Phi(x, \xi, \eta)}{\partial\xi} = \psi_{\xi\eta}(x) \quad \text{e} \quad \frac{\partial\Phi(x, \xi, \eta)}{\partial\eta_i} = \varphi_{\xi\eta,i}(x), \quad i = 1, \ldots, n,$$

dove $\psi_{\xi\eta}$ e $\varphi_{\xi\eta,i}$ sono le soluzioni dei Problemi di Cauchy (9.68) e (9.70).

Dim.[1] Per $\delta > 0$ sufficientemente piccolo, la funzione Φ è ben definita ed è continua per il Teorema 9.1 e l'osservazione che lo segue.

Proviamo che Φ è differenziabile con continuità in η. È sufficiente considerare il caso $n = 1$, ovvero η è unodimensionale. Per $x, \xi \in I$, $\eta \in B$ e $h \in \mathbb{R}$ con $0 < |h| \le h_0$ sufficientemente piccolo

(9.71)
$$\begin{aligned}\frac{y_{\xi,\eta+h}(x) - y_{\xi\eta}(x)}{h} &= \frac{1}{h}\left[\eta + h + \int_\xi^x f(t, y_{\xi,\eta+h}(t))\,dt - \eta - \int_\xi^x f(t, y_{\xi\eta}(t))\,dt\right]\\ &= 1 + \int_\xi^x \frac{f(t, y_{\xi,\eta+h}(t)) - f(t, y_{\xi\eta}(t))}{h}\,dt\\ &= 1 + \int_\xi^x \frac{y_{\xi,\eta+h}(t) - y_{\xi\eta}(t)}{h}\frac{\partial f}{\partial y}(t, \bar{y}_h(t))\,dt.\end{aligned}$$

Nell'ultima riga abbiamo usato il Teorema del valor medio che fornisce un $\bar{y}_h(t) \in (y_{\xi,\eta+h}(t), y_{\xi\eta}(t))$ tale che

$$f(t, y_{\xi,\eta+h}(t)) - f(t, y_{\xi\eta}(t)) = \big(y_{\xi,\eta+h}(t) - y_{\xi\eta}(t)\big)\frac{\partial f}{\partial y}(t, \bar{y}_h(t)).$$

Sia $\varphi \in C^1(I; \mathbb{R})$ la soluzione del Problema di Cauchy (9.70). Lasciamo cadere l'indice i, in quanto $n = 1$. Lasciamo anche cadere la dipendenza da ξ ed η nelle notazioni. La condizione iniziale è $\varphi(\xi) = 1$. Dunque φ risolve l'equazione integrale

$$\varphi(x) = 1 + \int_\xi^x \varphi(t)\frac{\partial f}{\partial y}(t, y_{\xi\eta}(t))\,dt. \tag{9.72}$$

Sottraendo (9.72) da (9.71) otteniamo

$$\begin{aligned}R(x,h) :&= \frac{y_{\xi,\eta+h}(x) - y_{\xi\eta}(x)}{h} - \varphi(x)\\ &= \int_\xi^x \left(\frac{y_{\xi,\eta+h}(t) - y_{\xi\eta}(t)}{h}\frac{\partial f}{\partial y}(t, \bar{y}_h(t)) - \varphi(t)\frac{\partial f}{\partial y}(t, y_{\xi\eta}(t))\right)dt,\end{aligned} \tag{9.73}$$

dove abbiamo tolto gli indici ξ ed η.

Affermiamo che esiste una costante $C > 0$ tale che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\bar{h} > 0$ tale che $|R(x,h)| \le C\varepsilon$ per ogni $0 < |h| \le \bar{h}$ e per tutti gli $x \in I$. La costante C non dipende da x, ξ, η. Questo proverà che

$$\lim_{h\to 0}\frac{y_{\xi,\eta+h}(x) - y_{\xi\eta}(x)}{h} = \varphi(x), \tag{9.74}$$

con convergenza uniforme in x, ξ, η. In particolare, la convergenza uniforme implica che

$$\frac{\partial \Phi(x,\xi,\eta)}{\partial \eta} \quad \text{esiste continua.}$$

[1]Tutta questa dimostrazione è esclusa dal programma. Visto in classe solo l'enunciato di una versione semplificata del Teorema 9.2.

Infatti, aggiungendo e togliendo $\varphi(t)\frac{\partial f}{\partial y}(t,\bar{y}_h(t))$ nell'integrale sulla destra in (9.73), otteniamo

$$R(x,h) = \int_\xi^x \frac{\partial f}{\partial y}(t,\bar{y}_h(t))R(t,h)\,dt + \int_\xi^x \varphi(t)\left(\frac{\partial f}{\partial y}(t,\bar{y}_h(t)) - \frac{\partial f}{\partial y}(t,y_{\xi\eta}(t))\right)dt.$$

Esiste una costante $M > 0$, che è uniforme in un intorno di (ξ,η), tale che

$$\sup_{t\in I}|\varphi(t)| \le M \quad \text{ e } \sup_{|h|\le h_0, t\in I}\left|\frac{\partial f}{\partial y}(t,\bar{y}_h(t))\right| \le M.$$

Inoltre, essendo $\partial f/\partial y$ continua in Ω, è uniformemente continua sui compatti di Ω. Quindi esiste $\sigma > 0$ dipendente da ε tale che

$$\left|\frac{\partial f}{\partial y}(t,\bar{y}_h(t)) - \frac{\partial f}{\partial y}(t,y_{\xi\eta}(t))\right| \le \varepsilon$$

non appena $|y_{\xi,\eta+h}(t) - y_{\xi\eta}(t)| \le \sigma$. Per il Teorema 9.1, tale stima vale per tutte le $t \in I$ non appena $|h| \le \bar{h}$ per qualche $\bar{h} > 0$ dipendente da σ.

In definitiva, per ogni $|h| \le \bar{h}$ e $x \in I$ si ha

$$|R(x,h)| \le 2\varepsilon\delta M + M\left|\int_\xi^x |R(t,h)|\,dt\right|,$$

e per il Lemma di Gronwall segue che $|R(x,h)| \le 2\varepsilon\delta M e^{M|x-\xi|}$. Questo termina la dimostrazione di (9.74).

Ora proviamo che

$$\lim_{h\to 0}\frac{y_{\xi+h,\eta}(x) - y_{\xi\eta}(x)}{h} = \psi(x), \tag{9.75}$$

dove ψ è la soluzione del Problema di Cauchy (9.68). Si ha

(9.76)
$$\begin{aligned}
\frac{y_{\xi+h,\eta}(x) - y_{\xi\eta}(x)}{h} &= \frac{1}{h}\left[\eta + \int_{\xi+h}^x f(t,y_{\xi+h,\eta}(t))\,dt - \eta - \int_\xi^x f(t,y_{\xi\eta}(t))\,dt\right] \\
&= \int_\xi^x \frac{f(t,y_{\xi+h,\eta}(t)) - f(t,y_{\xi\eta}(t))}{h}\,dt - \frac{1}{h}\int_\xi^{\xi+h} f(t,y_{\xi+h,\eta}(t))\,dt \\
&= \int_\xi^x \frac{y_{\xi+h,\eta}(t) - y_{\xi\eta}(t)}{h}\frac{\partial f}{\partial y}(t,\bar{y}_h(t))\,dt - \frac{1}{h}\int_\xi^{\xi+h} f(t,y_{\xi+h,\eta}(t))\,dt,
\end{aligned}$$

per qualche (nuova) $\bar{y}_h(t) \in (y_{\xi+h,\eta}(t), y_{\xi\eta}(t))$. Sia $\psi \in C^1(I;\mathbb{R})$ la soluzione del Problema di Cauchy (9.68). Allora ψ risolve l'equazione integrale

$$\psi(x) = -f(\xi,y_{\xi\eta}(\xi)) + \int_\xi^x \psi(t)\frac{\partial f}{\partial y}(t,y_{\xi\eta}(t))\,dt. \tag{9.77}$$

Sottraendo (9.77) da (9.76) otteniamo

$$\begin{aligned}
S(x,h) :&= \frac{y_{\xi+h,\eta}(x) - y_{\xi\eta}(x)}{h} - \psi(x) \\
&= \int_\xi^x \left(\frac{y_{\xi+h,\eta}(t) - y_{\xi\eta}(t)}{h} \frac{\partial f}{\partial y}(t, \bar{y}_h(t)) - \psi(t) \frac{\partial f}{\partial y}(t, y_{\xi\eta}(t)) \right) dt + \\
&\quad - \frac{1}{h} \int_\xi^{\xi+h} \big\{ f(t, y_{\xi+h,\eta}(t)) - f(\xi, y_{\xi\eta}(\xi)) \big\}\, dt \\
&= \int_\xi^x S(t,h) \frac{\partial f}{\partial y}(t, \bar{y}_h(t)) - \psi(t) \Big(\frac{\partial f}{\partial y}(t, y_{\xi\eta}(t)) - \frac{\partial f}{\partial y}(t, \bar{y}_h(t)) \Big)\, dt + \\
&\quad - \frac{1}{h} \int_\xi^{\xi+h} \big\{ f(t, y_{\xi+h,\eta}(t)) - f(\xi, y_{\xi\eta}(\xi)) \big\}\, dt.
\end{aligned}$$

Usando la continuità uniforme di f e $\frac{\partial f}{\partial y}$, come sopra deduciamo che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\bar{h} > 0$ tale che per ogni $|h| \leq \bar{h}$ e $x \in I$ si abbia

$$|S(x,h)| \leq 2\varepsilon\delta(M+1) + M \Big| \int_\xi^x |S(t,h)|\, dt \Big|,$$

dove ora M è un “bound” per ψ e $\frac{\partial f}{\partial y}$. L'affermazione segue. □

9.3. Flusso di un campo vettoriale. In questa sezione cambiamo notazione. Indichiamo con $t \in \mathbb{R}$ la “variabile temporale” e con $x \in \mathbb{R}^n$ la “variabile spaziale”. Con $\dot{\gamma}$ indichiamo la derivata in t di una curva $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$, $I \subset \mathbb{R}$ intervallo.

Un *campo vettoriale* su $\mathbb{R}^n$ è una funzione $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Se $F \in C^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ allora F è localmente di Lipschitz. Dunque, per il Teorema di esistenza e unicità locale, per ogni $x \in \mathbb{R}^n$ il Problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{\gamma} = F(\gamma) \\ \gamma(0) = x. \end{cases} \tag{9.78}$$

ha un'unica soluzione locale $\gamma_x \in C^1(I_x)$ per qualche intervallo $I_x \subset \mathbb{R}$ contenente $t = 0$. Se $I_x = \mathbb{R}$ per ogni $x \in \mathbb{R}^n$, ovvero se ogni soluzione γ_x è definita per tutti i tempi $t \in \mathbb{R}$, il campo F si dice *completo.*

Definizione 9.3 (Flusso). Sia $F \in C^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ un campo completo. La funzione $\Phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

$$\Phi(t,x) = \gamma_x(t),$$

dove $\gamma_x \in C^1(\mathbb{R}; \mathbb{R}^n)$ è la soluzione del Problema di Cauchy (9.78) si dice *flusso* del campo vettoriale F. Per ogni $t \in \mathbb{R}$, definiamo la funzione $\Phi_t : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ponendo $\Phi_t(x) = \Phi(t,x)$.

Proposizione 9.4. Sia $F \in C^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ un campo completo. Allora il suo flusso Φ verifica le seguenti proprietà:

i) $\Phi \in C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$.
ii) $\Phi(0,x) = x$ per ogni $x \in \mathbb{R}^n$, ovvero $\Phi_0 = \mathrm{Id}$.
iii) Il flusso verifica la proprietà di gruppo $\Phi_{t+s} = \Phi_t \circ \Phi_s$ per ogni $s, t \in \mathbb{R}$. In particolare, $\Phi_t^{-1} = \Phi_{-t}$.

Dim. L'affermazione i) segue dal Teorema di 9.2. L'affermazione iii) segue dall'unicità della soluzione per il Problema di Cauchy. □

10. Esercizi

10.1. Equazioni del primo ordine.

Esercizio 75. Calcolare la soluzione generale delle seguenti equazioni differenziali:

$$\text{i) } y' = \frac{y\cos x}{1+\sin x} + \sin x; \quad \text{ii) } y' = \frac{3}{x}y + x^2 + 1, \quad x > 0.$$

Esercizio 76. Calcolare la soluzione dei seguenti Problemi di Cauchy

$$\text{i) } \begin{cases} y' = \dfrac{y}{1+e^x} + e^{-x} \\ y(0) = 0. \end{cases} \qquad \text{iii) } \begin{cases} y' = y^2\log(x+3) \\ y(-2) = -\dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Risposte: ii) $y = \big(x - (x+3)\log(x+3)\big)^{-1}$.

Esercizio 77. Si consideri l'equazione differenziale

$$y' = (y^2 - y)\log(2+x).$$

i) Determinare il suo integrale generale.
ii) Risolvere il problema di Cauchy con dato $y(-1) = 1/2$.

Esercizio 78. Si consideri l'equazione differenziale

$$y' = (y-1)(y-4)\frac{\cos x}{\sin x}.$$

i) Trovare tutte le soluzioni costanti.
ii) Calcolare la soluzione generale dell'equazione in forma implicita.
iii) Calcolare in forma esplicita la soluzione del problema di Cauchy con dato iniziale $y(3\pi/2) = 5$.

Esercizio 79. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua tale che $f(0) = 0$, $f(t) > 0$ se $t \neq 0$, e

$$\int_0^1 \frac{dt}{f(t)} = \infty.$$

Provare che $y = 0$ è l'unica soluzione del Problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = f(y) \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

Esercizio 80. Calcolare la soluzione del seguente Problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{\pi\cos(xy)}{x^2} \\ y(1) = \pi. \end{cases}$$

Esercizio 81. Calcolare la soluzione $y \in C^1(a,b)$, $-\infty \leq a < 1 < b \leq \infty$, del Problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{y-x}{y+x}, \\ y(1) = 0, \end{cases}$$

e disegnare un grafico qualitativo di y. Calcolare b e mostrare che $a > -\frac{1}{2}e^{-\pi/2}$.

Esercizio 82. Calcolare la soluzione del Problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \sin(x+y+3) \\ y(0) = -3. \end{cases}$$

Esercizio 83. Calcolare la soluzione generale della seguente equazione differenziale

$$y' = y - \frac{x^2}{y}.$$

Esercizio 84. Calcolare la soluzione del seguente Problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = y(y-1)(x+1), \quad x \in \mathbb{R}, \\ y(0) = \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Risposta: $y(x) = (1 + \mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2+x})^{-1}$, $x \in \mathbb{R}$.

Esercizio 85. Si consideri l'equazione differenziale

$$(1-\cos y)y' = x \sin x \sin y.$$

i) Determinare tutte le soluzioni costanti;
ii) Calcolare (in forma implicita) l'integrale generale;
iii) Calcolare la soluzione dell'equazione che verifica la condizione iniziale $y(0) = \frac{5}{2}\pi$.

Risposte: i) $y = k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$. ii) $\cos y = 2\mathrm{e}^{x\cos x - \sin x - C} - 1$ con $C \in \mathbb{R}$. iii) $y(x) = 2\pi + \arccos\big(\mathrm{e}^{x\cos x - \sin x} - 1\big)$.

Esercizio 86. Calcolare la soluzione del Problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{x^2+y^2}{xy}, \quad x > 1 \\ y(\sqrt{2}) = \sqrt{2\log 2}. \end{cases}$$

Esercizio 87. Dimostrare che esiste un'unica soluzione $y \in C^1(\mathbb{R})$ del problema differenziale

$$\begin{cases} (y'(x))^2 = 1 + \sqrt{|y(x)|}, \quad x \in \mathbb{R}, \\ y(0) = 0, \ y'(0) = 1. \end{cases}$$

Esercizio 88. Consideriamo il seguente Problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \sqrt{x} + \sqrt{|y|}, \quad x \geq 0 \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

i) Dimostrare che ogni soluzione y verifica $y(x) \geq \frac{2}{3}x^{3/2}$ per $x \geq 0$.
ii) Usando il Teorema delle contrazioni provare che esiste un'unica soluzione locale del problema.
iii) Provare che la soluzione è definita su tutto $[0, \infty)$.
iv) Dimostrare che

$$\lim_{x\to\infty} \frac{y(x)}{x^2} = \frac{1}{4}, \quad \text{and} \quad \lim_{x\to 0^+} \frac{y(x)}{x^{3/2}} = \frac{2}{3}.$$

Esercizio 89. Dimostrare che esistono soluzioni periodiche $y \in C^1(\mathbb{R})$ dell'equazione differenziale

$$y'(x) = 2\sin y(x) + \sin x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Esercizio 90. Si consideri l'equazione differenziale

$$x^3 y' - 2y + 2x = 0.$$

Provare che:

i) Ogni soluzione $y \in C^1(\mathbb{R} \setminus \{0\})$ si estende ad una funzione in $C^1(\mathbb{R})$;
ii) L'equazione non ha soluzioni analitiche definite in un intorno di $x = 0$.

Esercizio 91. per $\alpha > 0$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, si consideri il problema differenziale

$$\begin{cases} y' = \dfrac{y \sin y}{1 + x^\alpha}, & x > 0, \\ \lim\limits_{x\to\infty} y(x) = \lambda. \end{cases}$$

Per dati α e λ, studiare esistenza e unicità di soluzioni $y \in C^1(0,\infty)$ del problema.

10.2. Equazioni del secondo ordine.

Esercizio 92. Siano $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e sia $y \in C^\infty(\mathbb{R})$ la soluzione del problema di Cauchy

$$y'' + 2y' + 2y = t\mathrm{e}^{-t}, \quad y(0) = \alpha, \; y'(0) = \beta.$$

1) Calcolare la soluzione y.
2) Determinare tutti gli $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ per i quali esiste finito il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{y(t)}{t}.$$

Esercizio 93. Calcolare la soluzione generale della seguente equazione differenziale

$$y'' + 4y = x^2 \mathrm{e}^{2x}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Esercizio 94. Calcolare la soluzione del seguente Problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' - 2y' + y = x(1 + \mathrm{e}^x), & x \in \mathbb{R}, \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0. \end{cases}$$

Esercizio 95. Siano $y_1, y_2 \in C^2(\mathbb{R})$ soluzioni dell'equazione

$$ay'' + by' + cy = 0, \quad \text{in } \mathbb{R},$$

dove a, b, c sono funzioni continue in $\mathbb{R}$ con $a(x) \neq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, e sia $w \in C^1(\mathbb{R})$ la funzione

$$w(x) = \det \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}.$$

Provare che esiste una costante $C \in \mathbb{R}$ tale che

$$w(x) = C \exp\Big(- \int_0^x \frac{b(t)}{a(t)} dt \Big), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Esercizio 96. Calcolare la soluzione del Problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + y = \dfrac{1}{\cos x}, \quad x \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right), \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0. \end{cases}$$

Soluzione: $y = \cos x \log(\cos x) + x \sin x$.

Esercizio 97. Calcolare la soluzione del Problema di Cauchy

$$\begin{cases} x^2 y'' + 3xy' - 3y = 0, \quad x \in \mathbb{R}^+ \\ y(1) = 0 \\ y'(1) = 4. \end{cases}$$

Esercizio 98 (Equazione della catenoide). Calcolare la soluzione $y \in C^2(\mathbb{R})$ del seguente Problema di Cauchy:

$$\begin{cases} \dfrac{y^2 y''}{(1 + y'^2)^{3/2}} = 1 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0. \end{cases}$$

Suggerimento: dividere per y^2, moltiplicare per y', integrare una prima volta.

Esercizio 99. Sia $g \in C([0, \infty))$ una funzione tale che

$$\int_0^\infty |g(x)|\, dx < \infty,$$

e sia $y \in C^2([0, \infty))$ la soluzione del Problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + y = gy, \quad x \geq 0, \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1. \end{cases}$$

Dimostrare che esiste una costante $M > 0$ tale che $|y(x)| \leq M$ per ogni $x \geq 0$.

Esercizio 100. Sia $f \in C(\mathbb{R})$ una funzione continua tale che $tf(t) \geq 0$ per ogni $t \in \mathbb{R}$. Provare che il Problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + \mathrm{e}^{-x} f(y) = 0 \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$$

ha l'unica soluzione $y = 0$.

Suggerimento: moltiplicare per $\mathrm{e}^x y'$ ed usare il Lemma di Gronwall.

Esercizio 101. Sia $F \in C^1([0, \infty))$ una funzione tale che $F(0) > 0$ ed $F'(x) \geq 0$ per ogni $x \geq 0$. Provare che ogni soluzione $y \in C^2([0, \infty))$ dell'equazione differenziale

$$y'' + F(x)y = 0, \quad x \geq 0,$$

è limitata. Suggerimento: moltiplicare per y' ed integrare.

ESERCIZIO 102. Sia $y \in C^2(\mathbb{R})$ la soluzione del Problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + 4y^3 = 0, & x \in \mathbb{R}, \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0. \end{cases}$$

Provare che la soluzione è effettivamente definita per ogni $x \in \mathbb{R}$, che $\|y\|_\infty \leq 1$, che y è pari e periodica.

ESERCIZIO 103. Sia $\alpha \geq 0$ un numero reale e si consideri il Problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + \dfrac{\alpha}{x} y' + y^3 = 0, \\ y(0) = 1, \\ y'(0) = 0. \end{cases}$$

i) Dimostrare che il Problema ha un'unica soluzione $y \in C^2([0, T))$ per qualche $T > 0$.
ii) Provare che la soluzione è definita su tutto $[0, \infty)$;
iii) Per $\alpha = 0$ dimostrare che la soluzione y è periodica e che

$$\max_{x \in [0,\infty)} y(x) = 1, \qquad \min_{x \in [0,\infty)} y(x) = -1.$$

Suggerimento: moltiplicare per x^α ed usare il Teorema delle contrazioni.

ESERCIZIO 104. Siano $a, b \in C(\mathbb{R})$ funzioni continue e sia $y_1 \in C^2(\mathbb{R})$ una soluzione dell'equazione differenziale

$$y'' + ay' + by = 0$$

tale che $y_1(x) \neq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Determinare una soluzione $y_2 \in C^2(\mathbb{R})$ linearmente indipendente da y_1.

ESERCIZIO 105. Provare che per ogni numero reale $\alpha > 0$ il problema con dati al bordo

$$\begin{cases} y'' = -y^2, & -\alpha < x < \alpha, \\ y(-\alpha) = y(\alpha) = 0 \end{cases}$$

ha esattamente due soluzioni $y \in C^2([-\alpha, \alpha])$.

ESERCIZIO 106. Per $\varepsilon > 0$ si consideri il problema con dati al bordo

$$\begin{cases} -\varepsilon y'' + y'^2 - 1 = 0 \text{ su } [-1, 1], \\ y(1) = y(-1) = 0 \end{cases}$$

i) Provare che se il problema ha una soluzione $y \in C^2([-1, 1])$ allora questa è unica. In particolare è pari: $y(x) = y(-x)$.
ii) Provare che ogni soluzione y del problema verifica $|y'(x)| < 1$ per ogni $x \in [-1, 1]$.
iii) Calcolare la soluzione $y = y_\varepsilon \in C^2([-1, 1])$ del problema.
iv) Calcolare il limite $z(x) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} y_\varepsilon(x)$.

ESERCIZIO 107. Siano $n \geq 3$ e $\lambda > 0$. Dimostrare che la funzione

$$\varphi(r) = \left(\frac{\lambda}{\lambda^2 + r^2} \right)^{\frac{n-2}{2}}$$

è l'unica soluzione del Problema di Cauchy

$$\begin{cases} \varphi''(r) + \dfrac{n-1}{r}\varphi'(r) = -n(n-2)\varphi(r)^{\frac{n+2}{n-2}}, \quad r > 0, \\ \varphi(0) = \lambda^{\frac{2-n}{2}} \\ \varphi'(0) = 0. \end{cases}$$

Esercizio 108. Sia $\varphi \in C^2(0,\infty)$ con $\varphi \geq 0$ una soluzione dell'equazione

$$(*) \qquad \varphi''(r) + \frac{n-1}{r}\varphi'(r) = -n(n-2)\varphi(r)^{\frac{n+2}{n-2}}, \qquad r > 0,$$

e sia $\psi \in C^2(\mathbb{R})$ la funzione definita da $\varphi(r) = r^{\frac{2-n}{2}}\psi(-\log r)$. Tale sostituzione si chiama sostituzione di Fowler-Emder.

i) Provare che esiste una costante $C \in \mathbb{R}$ tale che

$$(**) \qquad \psi'(t)^2 = (n-2)^2\left(\frac{1}{4}\psi(t)^2 - \psi(t)^{\frac{2n}{n-2}}\right) + C, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

ii) Assumendo φ limitata vicino $r = 0$, provare che deve essere $C = 0$.

iii) Sia $\varphi \in C^2([0,\infty))$, $\varphi \geq 0$, una soluzione di $(*)$ e sia $\vartheta \in C^2(0,\infty)$ la funzione definita da $\varphi(r) = (r\vartheta(r))^{\frac{2-n}{2}}$. Usando $(**)$ con $C = 0$, provare che ϑ risolve l'equazione di Eulero

$$r^2\vartheta'' + r\vartheta' - \vartheta = 0,$$

e quindi determinare φ.

10.3. Analisi qualitativa.

Esercizio 109. Dimostrare che esiste un'unica soluzione $y \in C^1(\mathbb{R})$ del Problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \sin\left(\dfrac{x}{y}\right) \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

Provare che y è pari e che

$$\lim_{x\to\infty} y(x) = \infty.$$

Esercizio 110. Si consideri il Problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = (y^2-1)(y^2+x^2) \\ y(0) = y_0, \end{cases}$$

dove $y_0 \in \mathbb{R}$ è un parametro reale.

i) Dimostrare che il problema ha un'unica soluzione massimale;
ii) Provare che per $y_0 = 0$ si ha $y(x) = -x^3/3 + O(x^5)$ per $x \to 0$;
iii) Provare che per $|y_0| < 1$ la soluzione è definita su tutto $\mathbb{R}$;
iv) Provare che per $y_0 > 1$ la soluzione non è definita su tutto $\mathbb{R}$.

Esercizio 111. Dimostrare che la soluzione del Problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = -(x+1)y^2 + x \\ y(-1) = 1 \end{cases}$$

è definita su tutto $\mathbb{R}$.

Esercizio 112. Si consideri il Problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{1}{y} - \dfrac{1}{x} \\ y(1) = 1. \end{cases}$$

i) Provare che il problema ha una soluzione unica definita sull'intervallo $(0, \infty)$.
ii) Disegnare un grafico qualitativo della soluzione.

Esercizio 113. Per $y_0 \in \mathbb{R}$ sia y la soluzione massimale del Problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = x \sin y \\ y(0) = y_0. \end{cases}$$

i) Mostrare che il problema ha un'unica soluzione definita su tutto $\mathbb{R}$;
ii) Provare che il seguente limite esiste

$$\lambda = \lim_{x \to \infty} y(x),$$

e calcolarlo in funzione di y_0.
iii) Mostrare che per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha $y(x) = \lambda + o(1/x^n)$ per $x \to \infty$, ovvero

$$\lim_{x \to \infty} x^n (y(x) - \lambda) = 0.$$

Esercizio 114. Dato un numero reale $y_0 \neq 0$, si consideri il Problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{1}{x^2 + y^2} \\ y(0) = y_0. \end{cases}$$

Dimostrare che:

i) Le soluzioni sono globalmente definite su $\mathbb{R}$;
ii) I limiti $L^- = \lim_{x \to -\infty} y(x)$ e $L^+ = \lim_{x \to +\infty} y(x)$ esistono finiti;
iii) Stimare L^+ ed L^- in relazione a y_0.

Esercizio 115. Si consideri il Problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \sqrt{y^2 + x^2 + 1} \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

i) Provare che il problema ha un'unica soluzione locale $y \in C^1(-\delta, \delta)$ per qualche $\delta > 0$;
ii) Provare che la soluzione è una funzione dispari: $y(-x) = -y(x)$ per ogni x;
iii) Provare che la soluzione è convessa per $x \geq 0$;
iv) Provare che la soluzione è definita per ogni $x \in \mathbb{R}$ (usare il Teorema di esistenza globale non ancora dimostrato in classe);
v) Provare che $y(x) \geq \sinh(x)$ per ogni $x \geq 0$.

10.4. Sistemi e flussi.

Esercizio 116. Sia $f \in C^1(\mathbb{R})$ una funzione tale che $f(1) = 0$ e sia $0 < x_0 < 1$ un numero reale. Provare che il Problema di Cauchy

$$\begin{cases} x' = xf(x^2+y^2) - y \\ y' = yf(x^2+y^2) + x \\ x(0) = x_0 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

ha un'unica soluzione che è definita su tutto $\mathbb{R}$.

Esercizio 117. sia A la matrice 2×2

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Calcolare la soluzione generale del sistema di equazioni differenziali $y' = Ay$.

Esercizio 118. Per $0 < T \leq \infty$ ai consideri lo spazio vettoriale $X = \big\{b \in C([0,T);\mathbb{R}^n) : \ b \text{ è limitata}\big\}$ munito della norma

$$\|b\|_\infty = \sup_{x\in[0,T)} |b(x)|.$$

Siano $A \in M_n(\mathbb{R})$ e $y_0 \in \mathbb{R}^n$, e si consideri il Problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = Ay + b \quad \text{in } [0,T) \\ y(0) = y_0. \end{cases}$$

Si definisca $T : X \to C^1([0,T);\mathbb{R}^n)$ ponendo $F(b) = y$ se $y \in C^1([0,T);\mathbb{R}^n)$ è la soluzione del Problema di Cauchy con dato b.

i) Dimostrare che per ogni $0 < T < \infty$ esiste una costante $0 < C_T < \infty$ tale che

$$(*) \qquad \|F(b_1) - F(b_2)\|_\infty \leq C_T \|b_1 - b_2\|_\infty$$

per ogni $b_1, b_2 \in X$;

ii) Dimostrare che la stima di continuità $(*)$ vale anche nel caso $T = \infty$, a patto che gli autovalori della matrice $A + A^t$ siano strettamente positivi.

Esercizio 119. Sia $f \in C^2(\mathbb{R}^n)$ una funzione tale che:

a) Gli insiemi $\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \leq \lambda\}$ sono compatti per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$.
b) $\nabla f(x) = 0$ se e solo se $x = 0$.

Si consideri il Problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot\gamma(t) = -\nabla f(\gamma(t)), \quad t \geq 0, \\ \gamma(0) = x_0, \end{cases}$$

dove $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Dimostrare che:

i) Il problema ha un'unica soluzione $\gamma_{x_0} \in C^2([0,\infty))$;
ii) $\lim_{t\to\infty} \gamma_{x_0}(t) = 0$;
iii) Nel caso $f(x) = |x|^2/2$, calcolare il flusso $\Phi : [0,\infty) \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $\Phi(t,x_0) = \gamma_{x_0}(t)$.

10.5. Equazioni alle derivate parziali.

Esercizio 120. Sia $\varphi \in C^1(\mathbb{R})$ una funzione assegnata. Calcolare la soluzione $u \in C^1(\mathbb{R}^2)$ del Problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y} = u, & \text{in } \mathbb{R}^2 \\ u(x,0) = \varphi(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Soluzione: $u(x,y) = \varphi(x-y)\mathrm{e}^y$.

Esercizio 121. Sia $\varphi \in C^1(\mathbb{R})$ una funzione assegnata. Calcolare la soluzione $u \in C^1(\mathbb{R}^2)$ del Problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} - y\dfrac{\partial u}{\partial y} = u, & \text{in } \mathbb{R}^2, \\ u(0,y) = \varphi(y), & y \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Soluzione: $u(x,y) = \varphi(y\mathrm{e}^x)\mathrm{e}^x$.

Esercizio 122. Sia $\varphi \in C^1(\mathbb{R})$ una funzione assegnata. Calcolare la soluzione $u \in C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$ del problema di Cauchy

$$\begin{cases} x\dfrac{\partial u}{\partial x} + y\dfrac{\partial u}{\partial y} = 2u, & y > 0 \\ u(x,1) = \varphi(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Soluzione: $u(x,y) = y^2\varphi(x/y)$.

Esercizio 123. Verificare che la funzione $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times (0,\infty))$, $n \geq 1$,

$$u(x,t) = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}}\mathrm{e}^{-\frac{|x|^2}{4t}}, \quad x \in \mathbb{R}^n, t > 0,$$

verifica l'*equazione del calore*

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \Delta u(x,t), \quad x \in \mathbb{R}^n,\ t > 0,$$

dove $\Delta = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ è l'operatore di Laplace.

CAPITOLO 6

Teoremi di invertibilità locale e della funzione implicita

1. Teorema di invertibilità locale

Sia $A \in M_n(\mathbb{R})$ una matrice reale $n \times n$ e consideriamo la funzione lineare $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $f(x) = Ax$ con $x \in \mathbb{R}^n$. Il sistema di equazioni lineari

$$f(x) = b \tag{1.79}$$

ha soluzione unica per ogni $b \in \mathbb{R}^n$ se e solo se $\det(A) \neq 0$. In altri termini, f è iniettiva e suriettiva se e solo se $\det(A) \neq 0$. Vogliamo generalizzare questi risultati di risolubilità a sistemi di equazioni (1.79) dove $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ è una funzione *non lineare*.

Dobbiamo preliminarmente introdurre i concetti di *diffeomorfismo* e di *diffeomorfismo locale*.

Definizione 1.1 (Diffeomorfismo). Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ un aperto. Una funzione $f \in C^k(A; \mathbb{R}^n)$, $1 \leq k \leq \infty$, si dice *diffeomorfismo di classe* C^k se:

i) $f : A \to f(A) \subset \mathbb{R}^n$ è iniettiva (e suriettiva);
ii) $f(A) \subset \mathbb{R}^n$ è un insieme aperto;
iii) La funzione inversa verifica $f^{-1} \in C^k(f(A); A)$.

Quando $k = 0$ la definizione di diffeomorfismo si riduce a quella di omeomorfismo. Siano A e B due spazi topologici. Una funzione $f : A \to B$ si dice *omeomorfismo* se f è iniettiva e suriettiva, ed inoltre sia f che f^{-1} sono continue. In questo caso (ovvero se f è 1-1 e su), dire che f^{-1} sia continua equivale a dire che f trasforma aperti in aperti.

Definizione 1.2 (Diffeomorfismo locale). Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ un aperto. Una funzione $f \in C^k(A; \mathbb{R}^n)$, $1 \leq k \leq \infty$, si dice un *diffeomorsifmo locale di classe* C^k se:

i) f è aperta, e cioè trasforma insiemi aperti in aperti.
ii) Per ogni punto $x \in A$ esiste un $\delta > 0$ tale che $f : B_\delta(x) \to \mathbb{R}^n$ è iniettiva e la funzione inversa verifica $f^{-1} \in C^k(f(B_\delta(x)); \mathbb{R}^n)$.

In particolare, se f è un diffeomorfismo locale allora $f(A) \subset \mathbb{R}^n$ è aperto.

Teorema 1.3 (Invertibilità locale). Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ un insieme aperto e sia $f \in C^k(A; \mathbb{R}^n)$, $1 \leq k \leq \infty$. Sono equivalenti le seguenti affermazioni:

A) f è un diffeomorfismo locale di classe C^k;
B) $\det(J_f(x_0)) \neq 0$ in ogni punto $x_0 \in A$, dove J_f è la matrice Jacobiana di f.

Esempio 1.4. Si consideri il seguente sistema di due equazioni nelle incognite $x, y \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} x + y \sin x = b_1 \\ x^2 y + \sin y = b_2, \end{cases} \tag{1.80}$$

dove $b = (b_1, b_2) \in \mathbb{R}^2$ è un dato assegnato.

Certamente, quando $b = 0$ il sistema ha almeno la soluzione nulla $x = y = 0$. Proviamo il seguente fatto: esistono due numeri $\varepsilon > 0$ e $\delta > 0$ tali che per ogni $b \in B_\varepsilon(0)$ esiste un'unica soluzione $(x, y) \in B_\delta(0)$ del sistema.

Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la funzione $f(x, y) = (x + y \sin x, x^2 y + \sin y)$. Risulta $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^2)$. La matrice Jacobiana di f è

$$J_f(x, y) = \begin{pmatrix} 1 + y \cos x & \sin x \\ 2xy & x^2 + \cos y \end{pmatrix}.$$

Nel punto $(x, y) = (0, 0) = 0$ si ha $\det J_f(0) = 1$ e per continuità si deduce l'esistenza di un $\delta > 0$ tale che $\det J_f(x, y) > 0$ per ogni $(x, y) \in B_\delta(0)$. Dunque, f è un diffeomorfismo locale di classe C^∞ su $B_\delta(0)$. Per il Teorema di invertibilità locale, pur di prendere $\delta > 0$ ancora più piccolo, f è anche aperta ed iniettiva su $B_\delta(0)$. Dunque l'insieme $f(B_\delta(0)) \subset \mathbb{R}^2$ è aperto e siccome $0 = f(0) \in f(B_\delta(0))$ allora esiste $\varepsilon > 0$ tale che $B_\varepsilon(0) \subset f(B_\delta(0))$.

Se $b \in B_\varepsilon(0)$ allora esiste $(x, y) \in B_\delta(0)$ tale che $f(x, y) = b$ e per l'iniettività di f il punto (x, y) è unico in $B_\delta(0)$. □

ESEMPIO 1.5. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione

$$f(x) = \begin{cases} x + x^2 \sin\big(1/x\big), & x \neq 0, \\ 0 & x = 0. \end{cases}$$

Affermiamo che:

i) f è derivabile in tutti i punti ed in particolare $f'(0) = 1$;
ii) f non è iniettiva in alcun intorno di $x = 0$.

In effetti, f non è di classe $C^1(\mathbb{R})$ perchè f' non è continua. Le ipotesi del Teorema di invertibilità locale non sono verificate.

Dalla definizione si calcola immediatamente $f'(0) = 1$ e inoltre per $x \neq 0$

$$f'(x) = 1 + 2x \sin(1/x) - \cos(1/x).$$

Il limite di $f'(x)$ per $x \to 0$ non esiste. Nei punti

$$x_k = \frac{1}{2k\pi}, \quad k \in \mathbb{Z},\ k \neq 0,$$

si ha $f'(x_k) = 0$ ed $f(x_k) = x_k$. Per $x \neq 0$ la derivata seconda di f è

$$f''(x) = 2 \sin(1/x) - \frac{2}{x} \cos(1/x) - \frac{1}{x^2} \sin(1/x),$$

e quindi per $k > 0$ si ha

$$f''(x_k) = -\frac{2}{x_k} < 0.$$

I punti x_k sono punti di massimo locale stretto e $x_k \to 0$ per $k \to \infty$. Quindi f non è iniettiva in alcun intorno di $x = 0$.

ESERCIZIO 124. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la funzione

$$f(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy).$$

i) Determinare il più grande aperto $A \subset \mathbb{R}^2$ tale che f sia un diffeomorfismo locale di classe C^∞ su A.
ii) Stabilire se f è un diffeomorfismo su A;
iii) Dare esempi di insiemi aperti $B \subset A$ massimali su cui f è un diffeomorfismo.

Soluzione. i) La matrice Jacobiana di f è

$$J_f(x,y) = \begin{pmatrix} 2x & -2y \\ 2y & 2x \end{pmatrix},$$

e dunque $\det J_f(x,y) = 4(x^2+y^2)$. Sull'insieme $A = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ il determinante Jacobiano non si annulla e dunque per il Teorema di invertibilità locale f è un diffeomorfismo locale (di classe C^∞) su A.

ii) f non è iniettiva su A in quanto $f(-x,-y) = f(x,y)$. Dunque f non è un diffeomorfismo su A.

iii) Un insieme aperto $B \subset A$ su cui f è un diffeomorfismo non può contenere punti simmetrici rispetto all'origine. Fissato un punto $(\xi,\eta) \in \mathbb{R}^2$ cerchiamo delle soluzioni $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ del sistema di equazioni $f(x,y) = (\xi,\eta)$ con opportune restrizioni su (x,y) in modo tale che la soluzione sia unica. Il sistema di equazioni è

$$x^2 - y^2 = \xi, \quad 2xy = \eta.$$

Dividiamo la seconda equazione per y. Per farlo occorre supporre $y \neq 0$. Si ottiene $x = \eta/2y$ che sostituita nella prima equazione fornisce

$$\frac{\eta^2}{4y^2} - y^2 = \xi.$$

Riordinando e risolvendo in y^2 si trovano le soluzioni

$$y^2 = \frac{-\xi \pm \sqrt{\xi^2+\eta^2}}{2}.$$

La soluzione col segno $-$ va scartata. L'equazione in y ha ora due soluzioni opposte. Scegliamo la soluzione positiva, ovvero richiediamo $y > 0$. Si trova

$$y = \sqrt{\frac{-\xi + \sqrt{\xi^2+\eta^2}}{2}}.$$

Dopo alcuni conti si ottiene allora anche

$$x = \operatorname{sgn}(\eta)\sqrt{\frac{\xi + \sqrt{\xi^2+\eta^2}}{2}}.$$

In definitiva, con la restrizione $y > 0$ siamo stati in grado di trovare una soluzione (x,y) unica. Quindi, sull'insieme aperto $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$, il semipiano superiore, la funzione f è iniettiva e dunque un diffeomorfismo. Un aperto che contiene strettamente B contiene necessariamente punti simmetrici rispetto all'origine. Quindi B è massimale. □

Dim. (Prova del Teorema 1.3) A)⇒B). Fissiamo $x_0 \in A$ e sia $\delta > 0$ tale che $f \in C^k(B_\delta(x_0);\mathbb{R}^n)$ sia un diffeomorfismo di classe C^k. Indichiamo con $f^{-1} : f(B_\delta(x_0)) \to B_\delta(x_0)$ la funzione inversa. Allora per ogni $x \in B_\delta(x_0)$ si ha $f^{-1}(f(x)) = x = I_n(x)$, dove I_n è la matrice identità $n \times n$. Dal teorema sul differenziale della funzione composta si ha

$$J_{f^{-1}}(f(x))J_f(x) = I_n, \quad x \in B_\delta(x_0).$$

Dal teorema sui determinanti si ottiene allora

$$1 = \det(I_n) = \det\big(J_{f^{-1}}(f(x))J_f(x)\big) = \det\big(J_{f^{-1}}(f(x))\big)\det(J_f(x)\big).$$

Questo implica che $\det(J_f(x)) \neq 0$ per ogni $x \in B_\delta(x_0)$ e in particolare per $x = x_0$.

B)⇒A). Supponiamo che sia $\det(J_f(x)) \neq 0$ in ogni punto $x \in A$. Siano $x_0 \in A$ ed $\varepsilon > 0$ piccolo a piacere tale che $B_\varepsilon(x_0) \subset A$. Proveremo che

$$\text{esiste } \delta > 0 \text{ tale che } B_\delta(f(x_0)) \subset f(B_\varepsilon(x_0)). \tag{1.81}$$

Da questo segue che f trasforma punti interni in punti interni e quindi aperti in aperti. L'affermazione (1.81) può essere riscritta nel seguente modo:

$$\text{esiste } \delta > 0 \text{ t.c. per ogni } y \in B_\delta(f(x_0)) \text{ esiste } x \in B_\varepsilon(x_0) \text{ tale che } f(x) = y. \tag{1.82}$$

Fissiamo dunque $y \in B_\delta(f(x_0))$ con $\delta > 0$ da determinare e cerchiamo un punto $x \in B_\varepsilon(x_0)$ tale che $f(x) = y$. Sia $T = df(x_0) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)$ il differenziale di f in x_0 e osserviamo che $\det(T) = \det(J_f(x_0)) \neq 0$. Dunque esiste l'operatore lineare inverso $T^{-1} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)$. Definiamo la funzione K della variabile x

$$K(x) = x - T^{-1}(f(x) - y). \tag{1.83}$$

Vogliamo provare che $K : \bar{B}_\varepsilon(x_0) \to \bar{B}_\varepsilon(x_0)$ è una contrazione rispetto alla distanza standard.

Siccome $\bar{B}_\varepsilon(x_0)$ è completo con la distanza ereditata da $\mathbb{R}^n$, dal Teorema di punto fisso di Banach segue che esiste un (unico) punto $x \in \bar{B}_\varepsilon(x_0)$ tale che $x = K(x)$. Ma allora

$$x = K(x) = x - T^{-1}(f(x) - y) \quad \Leftrightarrow \quad 0 = T^{-1}(f(x) - y) \quad \Leftrightarrow \quad f(x) - y = 0,$$

e quindi $f(x) = y$. Questo prova l'affermazione (1.82).

Dobbiamo mostrare che:
i) K è ben definita, e cioè trasforma $\bar{B}_\varepsilon(x_0)$ in se stesso;
ii) K è una contrazione.

Per provare che K è ben definita conviene introdurre la funzione ausiliaria $g(x) = x - T^{-1}(f(x))$. Osserviamo che $dg(x_0) = I_n - T^{-1}df(x_0) = 0$, ovvero, per l'identificazione di differenziale e matrice Jacobiana,

$$\frac{\partial g_i(x_0)}{\partial x_j} = 0, \quad i, j = 1, \dots, n. \tag{1.84}$$

Siccome g è di classe C^1 (in quanto lo è f), pur di prendere un $\varepsilon > 0$ più piccolo, si può per continuità supporre che

$$\|dg(x)\| \leq \frac{1}{2} \quad \text{per ogni } x \in B_\varepsilon(x_0). \tag{1.85}$$

Questa affermazione può essere provata partendo dalla disuguaglianza (Teorema sulle norme equivalenti)

$$\|dg(x)\| \le C\Big(\sum_{i,j=1}^{n}\Big(\frac{\partial g_i(x)}{\partial x_j}\Big)^2\Big)^{1/2},$$

con $C > 0$ costante assoluta. Dalla (1.84) e dalla continuità delle derivata parziali di g segue la (1.85). È in questo punto che si usa la regolarità almeno C^1 di f.

Sia ora $x \in \bar{B}_\varepsilon(x_0)$. Allora abbiamo

$$\begin{aligned}|K(x) - x_0| &= |x - T^{-1}(f(x) - y) - x_0| = |x - T^{-1}(f(x)) + T^{-1}(y) - x_0|\\ &= |g(x) - g(x_0) + T^{-1}(y - f(x_0))| \le |g(x) - g(x_0)| + |T^{-1}(f(x_0) - y)|.\end{aligned}$$

Per il Corollario del Teorema del valor medio esiste $z \in [x_0, x]$ tale che

$$|g(x) - g(x_0)| \le \|dg(z)\||x - x_o|,$$

e quindi

$$|K(x) - x_0| \le \|dg(z)\||x - x_0| + \|T^{-1}\||f(x_0) - y| \le \frac{1}{2}\varepsilon + \delta\|T^{-1}\|.$$

In definitiva, affinchè K sia ben definita è sufficiente scegliere $\delta < \frac{\varepsilon}{2\|T^{-1}\|}$.

Proviamo ora che K è una contrazione. Per ogni $x, \bar{x} \in \bar{B}_\varepsilon(x_0)$ si ha come sopra

$$\begin{aligned}|K(x) - K(\bar{x})| &= |x - T^{-1}(f(x) - y) - (\bar{x} - T^{-1}(f(\bar{x}) - y))|\\ &= |x - T^{-1}(f(x)) - (\bar{x} - T^{-1}(f(\bar{x}))| = |g(x) - g(\bar{x})| \le \frac{1}{2}|x - \bar{x}|.\end{aligned}$$

Dunque K è una contrazione con fattore contrattivo $1/2$.

Prossimo obiettivo è di provare che esiste una costante $M > 0$ tale che per ogni $x, \bar{x} \in B_\varepsilon(x_0)$ si ha

$$|f(x) - f(\bar{x})| \ge M|x - \bar{x}|. \tag{1.86}$$

Tale maggiorazione implica in particolare che f è iniettiva e che f^{-1} è continua. Precisamente f^{-1} verifica

$$|f^{-1}(y) - f^{-1}(\bar{y})| \le \frac{1}{M}|y - \bar{y}|. \tag{1.87}$$

La verifica di (1.86) si riconduce nuovamente alle proprietà di g:

$$\begin{aligned}|x - \bar{x}| &= |g(x) - T^{-1}(f(x)) - (g(\bar{x}) - T^{-1}(f(\bar{x})))|\\ &\le |g(x) - g(\bar{x})| + \|T^{-1}\||f(x) - f(\bar{x})|\\ &\le \frac{1}{2}|x - \bar{x}| + \|T^{-1}\||f(x) - f(\bar{x})|,\end{aligned}$$

e quindi $|f(x) - f(\bar{x})| \ge M|x - \bar{x}|$ con $M = \frac{1}{2\|T^{-1}\|}$.

Rimane da provare che la funzione inversa $f^{-1} : f_\varepsilon(B(x_0)) \to B_\varepsilon(x_0)$ è di classe C^k. Proviamo che f^{-1} è differenziabile con derivate parziali continue. Per ipotesi si ha

$$f(x) = f(x_0) + df(x_0)(x - x_0) + E_{x_0}(x),$$

dove

$$\lim_{x \to x_0} \frac{E_{x_0}(x)}{|x - x_0|} = 0.$$

Invertendo l'identità precedente con $y = f(x)$ ed $y_0 = f(x_0)$ si ottiene

$$\begin{aligned} f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0) &= df(x_0)^{-1}(y - y_0 - E_{x_0}(x)) \\ &= df(x_0)^{-1}(y - y_0) - df(x_0)^{-1}(E_{f^{-1}(y_0)}(f^{-1}(y))). \end{aligned}$$

Dalla stima (1.86) si deduce che

$$\lim_{y\to y_0} \frac{E_{f^{-1}(y_0)}(f^{-1}(y))}{|y-y_0|} = \lim_{x\to x_0} \frac{E_{x_0}(x)}{|f(x)-f(x_0)|} = \lim_{x\to x_0} \frac{|x-x_0|}{|f(x)-f(x_0)|}\frac{E_{x_0}(x)}{|x-x_0|} = 0.$$

Questo prova che f^{-1} è differenziabile nel punto y_0 con differenziale

$$df^{-1}(y_0) = df(x_0)^{-1}.$$

Poichè il differenziale può essere rappresentato come la matrice Jacobiana delle derivate parziali, l'ultima identità può essere riformulata dicendo che $Jf^{-1}(y_0) = Jf(x_0)^{-1}$. Dal Teorema sulla matrice inversa deduciamo che le entrate di $Jf^{-1}(y_0)$ sono funzioni che dipendono in modo continuo da y_0. Lo stesso argomento prova che f^{-1} è di classe C^k. □

Il teorema di invertibilità locale ha una naturale riformulazione nell'ambito degli spazi di Banach.

Teorema 1.6. Siano X ed Y due spazi di Banach, sia $A \subset X$ un insieme aperto e sia $f : X \to Y$ una funzione di classe $C^1(A)$ (ovvero f è differenziabile in tutti i punti di A e la funzione $A \ni x \mapsto df(x) \in \mathcal{L}(X,Y)$ è continua). Allora per ogni $x_0 \in A$ esiste $\delta > 0$ tale che $f(B_\delta(x_0)) \subset Y$ è un aperto, f è invertibile su $B_\delta(x_0)$ ed $f^{-1} \in C^1(f(B_\delta(x_0)); B_\delta(x_0))$.

La dimostrazione del teorema è identica a quella in $\mathbb{R}^n$.

Osservazione 1.7 (Invertibilità globale). Supponiamo che $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ sia un diffeomorfismo locale (ad esempio di classe C^1). In particolare, f è localmente invertibile. Ci si può domandare sotto quali ipotesi ulteriori su f, la funzione f è globalmente invertibile. Teoremi di questo tipo si dicono teoremi di inversione globale. Si veda sul tema il Capitolo 3 di Ambrosetti-Prodi, *A Primer of Nonlinear Analysis*, Cambridge.

2. Teorema sulla funzione implicita

2.1. Premessa. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione e consideriamo l'equazione $f(x,y) = 0$ nelle variabili $x, y \in \mathbb{R}$. Ci domandiamo quando tale equazione definisca implicitamente una funzione $y = \varphi(x)$ oppure una funzione $x = \psi(y)$, anche solo *localmente*.

Consideriamo l'esempio $f(x,y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$ ed analizziamo l'insieme (la circonferenza)

$$M = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : f(x,y) = 0\big\}.$$

Le derivate parziali di f sono $f_x = 2x$ ed $f_y = 2y$. Dunque, su M si ha $|\nabla f(x,y)| = 2 \neq 0$. In particolare, nel "polo nord" $N = (0,1)$ si ha $f_x = 0$ ed $f_y = 2 \neq 0$, mentre nel "polo est" $E = (1,0)$ si ha $f_x = 2 \neq 0$ ed $f_y = 0$.

La semicirconferenza centrata nel polo nord N è l'y-grafico della funzione $\varphi \in C^\infty(-1,1)$, $\varphi(x) = \sqrt{1-x^2}$,

$$M \cap \{y > 0\} = \big\{(x, \varphi(x)) \in \mathbb{R}^2 : x \in (-1,1)\big\}.$$

La variabile y si esplicita in funzione della variabile x.

Viceversa, la semicirconferenza centrata nel polo est E è l'x-grafico della funzione $\psi \in C^\infty(-1,1)$, $\psi(y) = \sqrt{1-y^2}$,

$$M \cap \{x > 0\} = \big\{(\psi(y), y) \in \mathbb{R}^2 : y \in (-1,1)\big\}.$$

La variabile x si esplicita come funzione della variabile y.

2.2. Argomento euristico. Sia $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$ una funzione tale che $f(0,0) = 0$ ed $f_y(0,0) > 0$. Allora:

- Per continuità delle derivate prime, esistono $\delta > 0$ ed $\eta > 0$ tali che $f_y(x,y) > 0$ per $(x,y) \in [-\delta,\delta] \times [-\eta \times \eta]$.
- Siccome $y \mapsto f(0,y)$ è strettamente crescente ed $f(0,0) = 0$, avremo $f(0,-\eta) < 0$ ed $f(0,\eta) > 0$.
- Per continuità di f, a meno di scegliere $\delta > 0$ ancora più piccolo, avremo $f(x,-\eta) < 0$ ed $f(x,\eta) > 0$ per ogni $x \in [-\delta,\delta]$.
- Per il Teorema degli zeri, per ogni $x \in [-\delta,\delta]$ esiste un punto $y = \varphi(x) \in [-\eta,\eta]$ tale che $f(x,\varphi(x)) = 0$. Per la stretta monotonia, questo punto è unico. Dunque, il grafico della funzione $x \mapsto \varphi(x)$ descrive l'insieme degli zeri di f.