Analisi 2

Roberto Monti

Appunti del Corso - Versione del 25 Ottobre 2012

Indice

CAPITOLO 1

Programma

Convergenza uniforme: Sup-norma. Teorema dello scambio dei limiti, continuità del limite uniforme. Criterio di Abel-Dirichlet per la convergenza uniforme di serie. Teorema di Dini. Convergenza uniforme e differenziabilità, scambio di somma e derivata. Convergenza uniforme e integrale di Riemann, scambio di limite e integrale.

Spazi metrici. Continuazione: Tutte le norme in $\mathbb{R}^n$ sono equivalenti. Lo spazio $C(K)$ è completo. Spazio delle trasformazioni lineari e continue, norma di un operatore, caratterizzazione della continuità. Funzioni Lipschitziane. Teoremi di punto fisso ed applicazioni.

Curve in $\mathbb{R}^n$. Curve regolari. Vettore tangente. Lunghezza e curve rettificabili. Teorema di rettificabilità. Riparametrizzazione a lunghezza d'arco.

Calcolo differenziale in $\mathbb{R}^n$. Derivate parziali e direzionali. Funzioni differenziabili. Differenziale della funzione composta. Teoremi del valor medio. Funzioni di classe C^1. Punti critici e punti di max/min locale. Teorema di Rademacher. Derivate di ordine superiore. Teorema di Schwarz. Formula di Taylor.

Equazioni differenziali ordinarie. Equazioni lineari del primo ordine. Equazioni a variabili separabili. Problema di Cauchy. Esistenza e unicità locale della soluzione con ipotesi Lipschitz. Soluzioni massimali. Lemma di Gronwall e soluzioni globali. Studio qualitativo. Cenni alle equazioni alle derivate parziali.

Teorema di Dini. Diffeomorfismi e diffeomorfismi locali. Teorema di invertibilità locale. Teorema della funzione implicita.

Sottovarietà differenziabili di $\mathbb{R}^n$. Equazione locale e parametrizzazioni. Sottovarietà. Teorema di equivalenza. Spazio tangente e spazio normale.

CAPITOLO 2

Convergenza uniforme

1. Convergenza uniforme e continuità

Siano X un insieme ed $f : X \to \mathbb{R}$ una funzione. Definiamo la "sup-norma" di f su X

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in X} |f(x)|.$$

La "sup-norma" verifica le seguenti proprietà elementari:

1) Si ha $\|f\|_\infty < \infty$ se e solo se f è limitata su X.
2) Vale la subadditività:
$$\begin{aligned}\|f+g\|_\infty &= \sup_{x\in X} |f(x)+g(x)| \le \sup_{x\in X} |f(x)|+|g(x)| \\ &\le \sup_{x\in X} |f(x)| + \sup_{x\in X} |g(x)| = \|f\|_\infty + \|g\|_\infty.\end{aligned}$$
3) Sia $f_n : X \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, una successione di funzioni. La successione $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge uniformemente su* X alla funzione $f : X \to \mathbb{R}$ se
$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0.$$
Per questo motivo, la "norma" $\|\cdot\|_\infty$ si chiama anche "norma della convergenza uniforme".
4) Sia X uno spazio metrico compatto e sia $f \in C(X)$. Per il Teorema di Weierstrass, la funzione $x \mapsto |f(x)|$ assume massimo su K. Dunque, nella definizione di sup-norma il sup può essere sostituito con un max:
$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in X} |f(x)| = \max_{x\in X} |f(x)|.$$
È immediato controllare che lo spazio vettoriale $C(X)$ è normato da $\|\cdot\|_\infty$. Vedremo nel Teorema 2.1 che $C(X)$ è uno spazio di Banach.

Esempio 1.1 (Palla nella norma $\|\cdot\|_\infty$). Ad esempio, nel caso $X = [0,1]$ per ogni $f \in C([0,1])$ ed $r > 0$, la palla

$$\begin{aligned}B_r(f) &= \{g \in C([0,1]) : \|g-f\|_\infty < r\} \\ &= \big\{g \in C([0,1]) : |f(x)-g(x)| < r \text{ per ogni } x \in [0,1]\big\}\end{aligned}$$

è l'insieme delle funzioni continue g il cui grafico è contenuto nella striscia di spessore $2r$ attorno al grafico di f.

Teorema 1.2 (Scambio dei limiti). Siano (X,d) uno spazio metrico ed $f, f_n : X \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, funzioni. Supponiamo che:

(i) $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0$;

(ii) Ogni funzione f_n è continua nel punto $x_0 \in X$.

Allora esistono e sono uguali i seguenti limiti

$$\lim_{x \to x_0} \lim_{n \to \infty} f_n(x) = \lim_{n \to \infty} \lim_{x \to x_0} f_n(x). \tag{1.1}$$

In particolare, f è continua in x_0.

Dim. Dobbiamo provare che

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Fissiamo $\varepsilon > 0$. Per la convergenza uniforme esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $n \geq \bar{n}$ si ha per ogni $x \in X$

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon/3$$

Scegliamo un $n \geq \bar{n}$. Per la continuità di f_n in x_0 esiste $\delta > 0$ tale che

$$d(x, x_0) < \delta \quad \Rightarrow \quad |f_n(x) - f_n(x_0)| < \varepsilon/3.$$

Dunque, per $d(x, x_0) < \delta$ avremo

$$|f(x) - f(x_0)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Questo prova la continuità di f nel punto x_0 e con ciò la formula sullo scambio dei limiti (1.1).

□

Se le funzioni f_n del Teorema 1.2 sono continue in ogni punto allora anche la funzione limite f sarà continua in ogni punto. Dunque si ha il seguente corollario.

Corollario 1.3. Siano (X, d) uno spazio metrico ed $f, f_n : X \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, funzioni. Supponiamo che $f_n \in C(X)$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e che $\lim_{n \to \infty} \|f_n - f\|_\infty = 0$. Allora, anche $f \in C(X)$.

Osservazione 1.4. La definizione di sup-norma, il Teorema sullo scambio dei limiti e il Corollario 1.3 possono essere riformulati per funzioni a valori in $\mathbb{R}^k$ per qualsiasi $k \geq 1$.

Il prossimo teorema, noto come Teorema di Dini, dà condizioni sufficienti per avere la convergenza uniforme.

Teorema 1.5 (Dini). Sia K uno spazio metrico compatto, e siano $f, f_n : K \to \mathbb{R}$ funzioni continue, $n \in \mathbb{N}$. Supponiamo che:

i) $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$ per ogni $x \in K$ e per ogni $n \in \mathbb{N}$;

ii) $\lim_{n \to \infty} f_n(x) = f(x)$ per ogni $x \in K$.

Allora, la convergenza in ii) è uniforme su K.

Dim. Supponiamo per assurdo che esista $\varepsilon > 0$ tale che $\|f_n - f\|_\infty > \varepsilon$ per infiniti $n \in \mathbb{N}$. Dunque esiste una selezione crescente di indici $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ ed esistono punti $x_{n_k} \in K$ tali che

$$f(x_{n_k}) - f_{n_k}(x_{n_k}) > \varepsilon, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Siccome K è compatto, si può assumere senza perdere di generalità che esista $x_0 \in K$ tale che $x_{n_k} \to x_0 \in K$ per $k \to \infty$. Altrimenti, si estrae un'ulteriore sottosuccessione e ci si riconduce a questo caso.

Sia ora $m \in \mathbb{N}$ e sia $n_k \geq m$. Per la monotonia i) avremo $f_m(x_{n_k}) \leq f_{n_k}(x_{n_k})$, e dunque

$$f(x_{n_k}) - f_m(x_{n_k}) \geq f(x_{n_k}) - f_{n_k}(x_{n_k}) > \varepsilon, \quad \text{se } m \leq n_k.$$

Facendo tendere $k \to \infty$ e usando $x_{n_k} \to x_0$ insieme alla continuità di f ed f_m, si ottiene la disuguaglianza

$$f(x_0) - f_m(x_0) \geq \varepsilon, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Questo contraddice la ii) nel punto $x = x_0$. □

2. Criterio di Abel–Dirichlet per la convergenza uniforme

Partiamo dalla seguente formula di somma per parti.

LEMMA 2.1. Siano $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ due successioni reali o complesse, supponiamo che la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converga e poniamo $A_n = \sum_{k=n}^{\infty} a_k$. Allora, per ogni $1 \leq M \leq N$ vale la formula di somma per parti

$$\sum_{n=M}^{N} a_n b_n = A_M b_M - A_{N+1} b_N - \sum_{n=M+1}^{N} A_n (b_{n-1} - b_n).$$

Dim. La verifica è elementare:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=M}^{N} a_n b_n &= \sum_{n=M}^{N} (A_n - A_{n+1}) b_n \\
&= \sum_{n=M}^{N} A_n b_n - \sum_{n=M}^{N} A_{n+1} b_n = \sum_{n=M}^{N} A_n b_n - \sum_{n=M+1}^{N+1} A_n b_{n-1} \\
&= A_M b_M - A_{N+1} b_N + \sum_{n=M+1}^{N} A_n (b_n - b_{n-1}).
\end{aligned}$$

□

TEOREMA 2.2 (Criterio di Abel–Dirichlet). Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione reale o complessa tale che converga la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, e sia $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di funzioni a valori reali o complessi definite su un insieme X. Supponiamo che:

$$C = \sup_{n\in\mathbb{N}} \|f_n\|_\infty < \infty \quad \text{e} \quad D = \sup_{x\in X} \sum_{n=1}^{\infty} |f_{n+1}(x) - f_n(x)| < \infty.$$

Allora la serie di funzioni $\sum_{n=1}^{\infty} a_n f_n(x)$ converge uniformemente su X.

Dim. Poniamo $A_n = \sum_{k=n}^{\infty} a_k$ cosicchè $\lim_{n\to\infty} A_n = 0$, per la convergenza della serie. Dati $n, p \in \mathbb{N}$, usando la formula di somma per parti si trova

$$\sum_{k=n}^{n+p} a_k f_k(x) = A_n f_n(x) - A_{n+p+1} f_{n+p}(x) + \sum_{k=n+1}^{n+p} A_k \big(f_k(x) - f_{k-1}(x)\big).$$

Fissato $\varepsilon > 0$ esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che per $n \geq \bar{n}$ si ha $|A_n| \leq \varepsilon$ e quindi per ogni $p \in \mathbb{N}$ si ottiene

$$\sup_{x\in X} \Big| \sum_{k=n}^{n+p} a_k f_k(x) \Big| \leq \varepsilon(2C + D).$$

Poichè la successione delle somme parziali della serie in esame è uniformemente di Cauchy su X, la serie converge uniformemente su X. □

Esempio 2.3 (Criterio di Abel). Se la serie di potenze complessa $\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ converge nel punto $z_0 \in \mathbb{C}$, allora converge uniformemente sul segmento $[0, z_0] = \{x z_0 \in \mathbb{C} : 0 \leq x \leq 1\}$.

Per $x \in [0, 1]$ si consideri la serie di funzioni

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n z_0^n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n f_n(x), \qquad a_n = b_n z_0^n, \quad f_n(x) = x^n.$$

La successione di funzioni $f_n(x) = x^n$ è uniformemente limitata su $[0, 1]$ e inoltre

$$\sum_{n=0}^{\infty} |f_{n+1}(x) - f_n(x)| = \sum_{n=0}^{\infty} (1 - x)x^n = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in [0, 1) \\ 0 & \text{se } x = 1. \end{cases}$$

La convergenza uniforme sul segmento segue dal Teorema 2.2.

3. Convergenza uniforme e differenziabilità

Nel seguente teorema proveremo che se una successione di funzioni derivabili converge in un punto e le derivate convergono uniformemente, allora la successione converge uniformemente.

Teorema 3.1. Sia $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, una successione di funzioni derivabili. Supponiamo che:

i) Esista $x_0 \in [0, 1]$ tale che la successione $\big(f_n(x_0)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
ii) La successione di funzioni $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente ad una funzione $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$.

Allora la successione $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente su $[0, 1]$ ad una funzione $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, f è derivabile ed $f'(x) = g(x)$ per ogni $x \in [0, 1]$.

Dim. Proviamo innanzi tutto che la successione $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente. Sarà sufficiente verificare che la successione è uniformemente di Cauchy. Dati $n, m \in \mathbb{N}$, per il Teorema di Lagrange per ogni $x \in [0, 1]$ esiste $\xi \in [x_0, x]$ tale che

$$f_n(x) - f_m(x) = f_n(x_0) - f_m(x_0) + \big(f_n'(\xi) - f_m'(\xi)\big)(x - x_0).$$

Dunque, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $n, m \geq \bar{n}$ si ha

$$\|f_n - f_m\|_\infty \leq |f_n(x_0) - f_m(x_0)| + \|f'_n - f'_m\|_\infty.$$

In conclusione, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente su $[0,1]$ ad una funzione $f \in C([0,1])$.

Sia ora $\bar{x} \in [0,1]$ un punto generico, e definiamo le funzioni $g_n : [0,1] \to \mathbb{R}$

$$g_n(x) = \begin{cases} \dfrac{f_n(x) - f_n(\bar{x})}{x - \bar{x}} & \text{se } x \neq \bar{x} \\ f'_n(\bar{x}) & \text{se } x = \bar{x}. \end{cases}$$

Per la derivabilità di ciascuna f_n, le funzioni g_n sono continue.

Proviamo che la successione $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è uniformemente di Cauchy. Per $x \neq \bar{x}$ abbiamo

$$g_n(x) - g_m(x) = \frac{f_n(x) - f_n(\bar{x}) - (f_m(x) - f_m(\bar{x}))}{x - \bar{x}} = \frac{h(x) - h(\bar{x})}{x - \bar{x}},$$

dove abbiamo posto $h = f_n - f_m$, che è continua su $[0,1]$ e derivabile per $x \neq \bar{x}$. Per il Teorema di Lagrange esiste $\xi \in [x, \bar{x}]$ tale che $h(x) - h(\bar{x}) = h'(\xi)(x - \bar{x})$, e dunque

$$g_n(x) - g_m(x) = h'(\xi) = f'_n(\xi) - f'_m(\xi).$$

Si deduce che $\|g_n - g_m\|_\infty \leq \|f'_n - f'_m\|_\infty$ e dunque $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è uniformemente di Cauchy dal momento che lo è $(f'_n)_{n\in\mathbb{N}}$. La conclusione è che la successione $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente.

Proviamo che f è derivabile e che $f' = g$. Per il Teorema sullo scambio dei limiti si ha

$$\lim_{n\to\infty} \lim_{x\to\bar{x}} \frac{f_n(x) - f_n(\bar{x})}{x - \bar{x}} = \lim_{x\to\bar{x}} \lim_{n\to\infty} \frac{f_n(x) - f_n(\bar{x})}{x - \bar{x}},$$

e dunque

$$\begin{aligned} g(\bar{x}) = \lim_{n\to\infty} f'_n(\bar{x}) &= \lim_{n\to\infty} \lim_{x\to\bar{x}} \frac{f_n(x) - f_n(\bar{x})}{x - \bar{x}} \\ &= \lim_{x\to\bar{x}} \lim_{n\to\infty} \frac{f_n(x) - f_n(\bar{x})}{x - \bar{x}} = \lim_{x\to\bar{x}} \frac{f(x) - f(\bar{x})}{x - \bar{x}} = f'(\bar{x}). \end{aligned}$$

□

Riassumiamo il Teorema 3.1 nel seguente corollario.

Corollario 3.2 (Scambio di derivata e limite). Sia $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di funzioni derivabili su $[0,1]$. Supponiamo che $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converga puntualmente e che $(f'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converga uniformemente. Allora, per ogni $x \in [0,1]$ si ha

$$\frac{d}{dx} \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{d}{dx} f_n(x).$$

Applicando il Teorema 3.1 alla successione delle somme parziali, si prova il seguente teorema sulla derivazione sotto segno di serie.

Teorema 3.3 (Scambio di derivata e somma). Sia $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, una successione di funzioni derivabili. Supponiamo che:

i) Esiste un punto $x_0 \in [0,1]$ tale che converga la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0)$;

ii) La serie delle derivate $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$ converge uniformemente su $[0,1]$.

Allora la serie di funzioni $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge uniformemente su $[0,1]$, definisce una funzione derivabile, ed inoltre

$$\frac{d}{dx}\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dx} f_n(x).$$

Osservazione 3.4. La scelta di lavorare sull'intervallo $[0,1]$ fatta in questa sezione è di pura comodità. I teoremi valgono per qualsiasi intervallo (limitato o illimitato, aperto o chiuso) di $\mathbb{R}$.

4. Convergenza uniforme e integrale di Riemann

Vedremo ora che con la convergenza uniforme è possibile portare il limite sotto segno di integrale. Il Teorema 4.1, tuttavia è di uso limitato. Teoremi di passaggio al limite sotto segno di integrale molto più efficienti sono: 1) il Teorema della convergenza dominata; 2) il Teorema della convergenza monotona (o di Beppo Levi). Questi teoremi richiedono la teoria dell'integrale di Lebesgue e verranno visti nella parte B del corso.

Teorema 4.1 (Scambio di limite e integrale). Sia $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, una successione di funzioni Riemann-integrabili e sia $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ una funzione. Se $f_n \to f$ uniformemente su $[0,1]$ per $n \to \infty$, allora f è Riemann-integrabile e inoltre

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx. \tag{4.2}$$

Dim. Proviamo preliminarmente che la funzione f è limitata. Infatti, fissato $\varepsilon > 0$, per la convergenza uniforme esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $n \geq \bar{n}$ si ha

$$\sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon,$$

e dunque per ogni $x \in [0,1]$ si ha

$$|f(x)| \leq |f_n(x) - f(x)| + |f_n(x)| \leq \varepsilon + \sup_{x\in[0,1]} |f_n(x)|.$$

Questo prova la limitatezza di f.

Proviamo ora che f è Riemann-integrabile. Sia $\varepsilon > 0$ fissato, e mostriamo che esiste una scomposizione $\sigma = \{0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_m = 1\}$ dell'intervallo $[0,1]$, per $m \in \mathbb{N}$ opportuno, tale che

$$S(f,\sigma) - s(f,\sigma) \leq \varepsilon,$$

dove

$$S(f,\sigma) = \sum_{i=1}^{m} |I_i| \sup_{x\in I_i} f(x) \quad \text{e} \quad s(f,\sigma) = \sum_{i=1}^{m} |I_i| \inf_{x\in I_i} f(x),$$

sono le somme superiori e inferiori di f relativamente a σ, $I_i = [x_{i-1}, x_i]$ e $|I_i| = x_i - x_{i-1}$.

Sia $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che $\sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| \le \varepsilon$ per ogni $n \ge \bar{n}$. Si ha allora

$$S(f,\sigma) \le \sum_{i=1}^{m} |I_i| \sup_{x\in I_i}(f(x) - f_n(x)) + \sum_{i=1}^{m} |I_i| \sup_{x\in I_i} f_n(x) \le \varepsilon + S(f_n,\sigma),$$

e analogamente

$$s(f,\sigma) = \sum_{i=1}^{m} |I_i| \inf_{x\in I_i}(f(x) - f_n(x)) + \sum_{i=1}^{m} |I_i| \inf_{x\in I_i} f_n(x) \ge -\varepsilon + s(f_n,\sigma).$$

Sottraendo membro a membro le due disuguaglianze si ottiene

$$S(f,\sigma) - s(f,\sigma) \le 2\varepsilon + S(f_n,\sigma) - s(f_n,\sigma).$$

Tale maggiorazione vale per una qualsiasi scomposizione σ e per ogni $n \ge \bar{n}$. Fissato un tale n, dal momento che f_n è Riemann-integrabile, possiamo scegliere la scomposizione σ in modo tale che $S(f_n,\sigma) - s(f_n,\sigma) \le \varepsilon$, e quindi

$$S(f,\sigma) - s(f,\sigma) \le 3\varepsilon.$$

Questo prova l'integrabilità di f.

Per provare la (4.2) è sufficiente osservare che fissato $\varepsilon > 0$ per $n \ge \bar{n}$ si ha

$$\Big| \int_0^1 f_n(x)dx - \int_0^1 f(x)dx \Big| = \Big| \int_0^1 (f_n(x) - f(x))dx \Big| \le \int_0^1 |f_n(x) - f(x)| dx \le \varepsilon.$$

□

5. Esercizi

5.1. Convergenza uniforme.

Esercizio 1. Costruire funzioni $f, f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, tali che:
1) $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$;
2) per ogni $-\infty \le a < b \le \infty$ la convergenza al punto 1) non è uniforme su (a,b).

Esercizio 2. Mostrare tramite esempi che ciascuna delle tre ipotesi: a) K compatto; b) f continua; e c) f_n continua per ogni $n \in \mathbb{N}$ è necessaria per la validità del Teorema 1.5.

Esercizio 3. Sia $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, una successione di funzioni periodiche, ciascuna di periodo $T_n > 0$, tali che:
1) ogni f_n è continua;
2) $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} T_n < \infty$;
3) $f_n \to f$ uniformemente su $\mathbb{R}$, per $n \to \infty$.

Provare che f è periodica.

Esercizio 4. a) La tesi nell'Esercizio 3 rimane valida anche solo con la convergenza puntuale invece che uniforme in 3). Provare questa affermazione o dare un controesempio.

b) La tesi nell'Esercizio 3 rimane valida anche senza l'ipotesi 2). Provare questa affermazione o dare un controesempio.

c) La tesi nell'Esercizio 3 rimane valida anche senza l'ipotesi 1). Provare questa affermazione o dare un controesempio.

Esercizio 5. Sappiamo che per ogni $x \in \mathbb{R}$ si ha la convergenza puntuale

$$\lim_{n\to\infty}\Big(1+\frac{x}{n}\Big)^n = \mathrm{e}^x.$$

Discutere la convergenza uniforme in tale limite.

Esercizio 6. Al variare di $x > 0$ studiare la convergenza puntuale e uniforme della serie

$$\sum_{n=0}^{\infty}(1-\log x)\log^n x,$$

e calcolarne la somma.

Esercizio 7. Al variare di $x \in \mathbb{R}$ studiare la convergenza puntuale e uniforme della serie di funzioni

$$\sum_{n=0}^{\infty}\mathrm{e}^{nx^2-n^2x}.$$

Esercizio 8. Studiare la convergenza puntuale e uniforme su opportuni sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ della successione di funzioni $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ così definita

$$f_n(x) = \frac{1+x^n}{n+x^{2n}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Esercizio 9. Sia X uno spazio metrico compatto, e siano $f, f_n \in C(X;\mathbb{R})$, $n \in \mathbb{N}$. Diciamo che la successione di funzioni $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge continuamente (o in modo continuo) ad f su X se per ogni successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ di X convergente ad $x \in X$ si ha $\lim_{n\to\infty} f_n(x_n) = f(x)$. Dimostrare che $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge continuamente ad f su X se e solo se converge uniformemente ad f su X.

5.2. Convergenza uniforme e derivabilità.

Esercizio 10. Sia $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, la successione di funzioni

$$f_n(x) = \frac{1}{n}\log(1+\mathrm{e}^{nx}), \quad x \in \mathbb{R}.$$

i) Studiare la convergenza puntuale e uniforme della successione $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
ii) Studiare la convergenza puntuale e uniforme della successione delle derivate $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$.

Esercizio 11. Sia $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, la successione di funzioni

$$f_n(x) = \sqrt[n]{1+x^{2n}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

i) Studiare la convergenza puntuale e uniforme della successione $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
ii) Studiare la convergenza puntuale e uniforme della successione delle derivate $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$.

Esercizio 12. Sia $f : (-R,R) \to \mathbb{R}$ la funzione

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad x \in (-R,R),$$

dove $0 < R \leq \infty$ è il raggio di convergenza della serie di potenze. Provare che $f \in C^\infty(-R, R)$. Verificare inoltre che

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Esercizio 13. Per ogni $x \in (-1, 1)$ calcolare la somma della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n.$$

Esercizio 14. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2\sqrt{n} + \cos x}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Provare che $f \in C^\infty(\mathbb{R})$.

Esercizio 15. Si consideri la successione di funzioni $f_n : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$,

$$f_n(x) = \frac{(x^2 - 1)^n}{n}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

i) Provare che la serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

converge uniformemente per $x \in [-1, 1]$.

ii) Provare che la serie delle derivate

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$$

converge per ogni $x \in [-1, 1]$, ma non converge uniformemente su $[-1, 1]$.

iii) Verificare che

$$\frac{d}{dx} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dx} f_n(x)$$

per ogni $x \in [-1, 1]$, ed in particolare per $x = 0$.

5.3. Convergenza uniforme e integrale.

Esercizio 16. Costruire una funzione $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ tale che:
1) f è Riemann-integrabile.
2) Detto $A = \big\{x \in [0, 1] : \ f \text{ non è continua in } x\big\}$ l'insieme dei punti di discontinuità di f, si ha $\bar{A} = [0, 1]$.

Esercizio 17. Studiare la convergenza puntuale e uniforme della successione di funzioni

$$f_n(x) = \Big(\frac{1}{n} + \sin^2 x\Big)^n, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Calcolare quindi il limite

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\pi f_n(x)\, dx.$$

Esercizio 18. i) Provare che

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 (1-t^2)^n dt = 0.$$

ii) Si consideri la successione di funzioni $f_n : [-1,1] \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$,

$$f_n(x) = \frac{\displaystyle\int_0^x (1-t^2)^n dt}{\displaystyle\int_0^1 (1-t^2)^n dt}, \quad x \in [-1,1].$$

Calcolare il limite puntuale

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x), \quad x \in [-1,1],$$

e discutere la convergenza uniforme.

Esercizio 19. Per ogni $x \in [-1,1)$ calcolare la somma della serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2n+1}.$$

Esercizio 20. Si consideri la successione di funzioni $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$,

$$f_n(x) = \int_1^n \frac{n}{ny^2+x^2} dy, \quad x \in \mathbb{R}.$$

i) Calcolare il limite puntuale

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

ii) Studiare la convergenza uniforme nel limite precedente.

CAPITOLO 3

Spazi metrici. Continuazione

1. Spazi di Banach di dimensione finita

Sia $(V, \|\cdot\|_V)$ uno spazio normato reale di dimensione finita $n \geq 1$. Fissiamo una base $\mathrm{v}_1, \ldots, \mathrm{v}_n$ di V. La trasformazione $\varphi : \mathbb{R}^n \to V$

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i \mathrm{v}_i, \quad x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n,$$

è un isomorfismo vettoriale. Definiamo su $\mathbb{R}^n$ la norma

$$\|x\| = \|\varphi(x)\|_V, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Verificare che $\|\cdot\|$ sia una norma su $\mathbb{R}^n$ è un facile esercizio. Gli spazi normati $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ e $(V, \|\cdot\|_V)$ sono isomorfi come spazi vettoriali e isometrici, con isometria φ, come spazi metrici. Nel seguito, non è dunque restrittivo limitare la discussione ad $\mathbb{R}^n$.

Proposizione 1.1. Due norme $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_2$ su $\mathbb{R}^n$ sono equivalenti. Ovvero, esistono due costanti $0 < C_1 \leq C_2 < \infty$ tali che per ogni $x \in \mathbb{R}^n$ si ha

$$C_1\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq C_2\|x\|_1. \tag{1.3}$$

Dim. Senza perdere di generalità, possiamo supporre che

$$\|x\|_1 = |x| = \Big(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\Big)^{1/2}, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Affermiamo che la funzione $f : \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$, $f(x) = \|x\|_2$, è continua rispetto alla distanza standard di $\mathbb{R}^n$. Infatti, dalla subadditività della norma segue segue

$$|f(x+h) - f(x)| = \big|\|x+h\|_2 - \|x\|_2\big| \leq \|h\|_2, \quad x, h \in \mathbb{R}^n.$$

D'altra parte, indicando con $\mathrm{e}_1, \ldots, \mathrm{e}_n$ la base canonica di $\mathbb{R}^n$, si ha

$$\|h\|_2 = \Big\|\sum_{i=1}^{n} h_i \mathrm{e}_i\Big\|_2 \leq \sum_{i=1}^{n} |h_i|\|\mathrm{e}_i\|_2 \leq M \sum_{i=1}^{n} |h_i|,$$

con $M = \max\{\|\mathrm{e}_1\|_2, \ldots, \|\mathrm{e}_n\|_2\}$. Dunque, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che $|h| < \delta$ implica $\|h\|_2 < \varepsilon$, e quindi anche $|f(x+h) - f(x)| < \varepsilon$. In effetti abbiamo provato che f è uniformemente continua.

La sfera unitaria $K = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\}$ è un insieme compatto, e quindi per il Teorema di Weierstrass la funzione $f : K \to [0, \infty)$ ammette massimo e minimo: esistono $y, z \in K$ tali che

$$0 < C_1 = \|y\|_2 \leq \|x\|_2 \leq \|z\|_2 = C_2 < \infty, \quad x \in K.$$

La disuguaglianza generele (1.3) segue per omogeneità. $\square$

Esempio 1.2 (Norme $\|\cdot\|_p$). Per $p \geq 1$ definiamo

$$\|x\|_p = \Big(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\Big)^{1/p}, \quad x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Quando $p = \infty$ definiamo

$$\|x\|_\infty = \max\{|x_1|, \dots, |x_n|\}, \quad x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Lo spazio $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_p)$ è normato. Proviamo la proprietà più impegnativa da verificare, la subadditività.

Siano $1 \leq p, q \leq \infty$ tali che $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Le norme $\|\cdot\|_p$ e $\|\cdot\|_q$ verificano la seguente disuguaglianza di Minkowski:

$$\langle x, y\rangle \leq \|x\|_p \|y\|_q, \quad x, y \in \mathbb{R}^n. \tag{1.4}$$

che vale anche nel caso $p = 1$ e $q = \infty$. Si tratta di una generalizzazione della disuguaglianza di Cauchy-Schwarz. Per provare la disuguaglianza (1.4) si seguano le indicazioni dell'Esercizio 23.

Veniamo alla subadditività. Per $x, y \in \mathbb{R}^n$ si ha

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^p &= \sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^{p-1}|x_i + y_i| \leq \sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^{p-1}(|x_i| + |y_i|) \\
&= \sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^{p-1}|x_i| + \sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^{p-1}|y_i| \\
&\leq \|x\|_p \Big(\sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^{(p-1)q}\Big)^{1/q} + \|y\|_q \Big(\sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^{(p-1)q}\Big)^{1/q} \\
&= (\|x\|_p + \|y\|_q)\Big(\sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^p\Big)^{1/q}.
\end{aligned}$$

Riordinando la disuguaglianza ottenuta si trova

$$\|x + y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p, \quad x, y \in \mathbb{R}^n.$$

2. Alcuni spazi funzionali

2.1. Funzioni continue su un compatto. Proviamo che lo spazio delle funzioni continue su un compatto munito della sup-norma è uno spazio di Banach.

Teorema 2.1. Sia (K, d) uno spazio metrico compatto. Lo spazio $X = C(K)$ con la norma della convergenza uniforme:

$$\|f\|_\infty = \max_{x \in K} |f(x)|$$

è uno spazio di Banach.

Dim. Sia $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di Cauchy in X. Per ogni $x \in K$ fissato, la successione $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione di Cauchy in $\mathbb{R}$ e quindi è convergente. Esiste un numero $f(x) \in \mathbb{R}$ tale che $f_n(x) \to f(x)$ per $n \to \infty$ e risulta così definita una funzione $f : K \to \mathbb{R}$. Proviamo che:

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0. \tag{2.5}$$

Per ogni $\varepsilon > 0$ fissato, esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $x \in K$ vale

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon \quad \text{per } m, n \geq \bar{n}.$$

Facendo tendere $m \to \infty$ e usando la convergenza $f_m(x) \to f(x)$ per $m \to \infty$ si ottiene, per ogni $x \in K$,

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \text{per } m, n \geq \bar{n}.$$

Questo prova l'affermazione (2.5).

Per il Teorema 1.3, $f : K \to \mathbb{R}$ è continua, ovvero $f \in X$.

□

2.2. Lo spazio $C^1([0,1])$. Lo spazio vettoriale

$$C^1([0,1]) = \big\{f : [0,1] \to \mathbb{R} \,|\, f \text{ è derivabile con continuità su } [0,1]\big\}.$$

munito della norma

$$\|f\|_{C^1([0,1])} = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$$

è uno spazio di Banach. Si veda l'Esercizio 24. In effetti, anche

$$\|f\|_* = |f(0)| + \|f'\|_\infty,$$

è una norma su $C^1([0,1])$ che lo rende completo. Tale norma è equivalente alla precedente.

2.3. Esempio di spazio non completo. Consideriamo lo spazio vettoriale $X = C([0,1])$ delle funzioni continue a valori reali definite sull'intervallo $[0,1] \subset \mathbb{R}$. La funzione $\|\cdot\|_1 : X \to [0,\infty)$

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)|dx$$

è una norma, detta *norma della convergenza* $L^1([0,1])$. La verifica delle proprietà della norma è elementare. Ad esempio, la subadditività della norma $\|\cdot\|_1$ segue dalla subadditività del valore assoluto e dalla monotonia dell'integrale. Precisamente, per $f, g \in X$ si ha

$$\|f+g\|_1 = \int_0^1 |f(x)+g(x)|dx \leq \int_0^1 \big(|f(x)|+|g(x)|\big)dx = \int_0^1 |f(x)|dx + \int_0^1 |g(x)|dx.$$

La palla centrata nella funzione nulla $f = 0$

$$B_r(0) = \Big\{g \in C([0,1]) : \int_0^1 |g(x)|dx < r\Big\}$$

è l'insieme delle funzioni continue g con integrale di $|g|$ minore di $r > 0$.

La distanza fra due funzioni $f, g \in X$ è

$$d(f,g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)|dx.$$

Proviamo che (X, d) non è uno spazio metrico completo.

Per $n \in \mathbb{N}$ sia $f_n \in C([0,1])$ la funzione così definita

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & x \in [0,1/2] \\ n(x-1/2) & x \in [1/2, 1/2+1/n] \\ 1 & x \in [1/2+1/n, 1]. \end{cases}$$

La successione $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è di Cauchy. Infatti, dati $m,n \in \mathbb{N}$ con $m \geq n$ risulta

$$d(f_m, f_n) = \int_0^1 |f_n - f_m| dx \leq \int_{1/2}^{1/2+1/n} (|f_n| + |f_m|) dx \leq \frac{2}{n}.$$

La candidata funzione limite è la funzione

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in [0,1/2] \\ 1 & x \in (1/2, 1]. \end{cases}$$

In effetti, la funzione f è Riemann-integrabile su $[0,1]$ e risulta

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 |f_n(x) - f(x)| dx = 0,$$

ma f non è in $C([0,1])$ perchè ha un punto di discontinuità. Dunque la successione $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ non converge ad un elemento di X.

D'altra parte, sappiamo che ogni spazio metrico ammette un completamento, e ci si può dunque chiedere qual è il completamento di $(C([0,1]), \|\cdot\|_1)$. Per rispondere occorre sviluppare la teoria dell'integrale di Lebesgue (seconda parte del corso). Il completamento è l'insieme delle funzioni Lebesgue-integrabili su $[0,1]$.

2.4. Funzioni Lipschitziane. Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ un insieme. Per ogni funzione $f : A \to \mathbb{R}$ definiamo

$$\mathrm{Lip}(f) = \inf \Big\{ L > 0 : \frac{|f(x) - f(y)|}{|x-y|} \leq L, \quad x, y \in A,\, x \neq y \Big\},$$

e diciamo che f è Lipschitziana su A se $\mathrm{Lip}(f) < \infty$. Posto $L = \mathrm{Lip}(f)$ avremo allora

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x-y|, \quad x, y \in A.$$

Dunque, le funzioni Lipschitziane sono uniformemente continue.

L'insieme $\mathrm{Lip}(A)$ delle funzioni Lipschitziane su A a valori in $\mathbb{R}^m$ è un sottospazio vattoriale di $C(A)$.

Un corollario del Teorema di Ascoli-Arzelà è il seguente fatto. Supponiamo che $A \subset \mathbb{R}^n$ sia compatto. Allora l'insieme

$$\big\{ f \in C(A) : \|f\|_\infty \leq 1 \text{ e } \mathrm{Lip}(f) \leq 1 \big\}$$

è un sottoinsieme *compatto* di $C(A)$ munito della norma della convergenza uniforme.

3. Teoremi di punto fisso

Sia X un insieme e sia $T : X \to X$ una funzione da X in se stesso. Siamo interessati all'esistenza di soluzioni $x \in X$ dell'equazione $T(x) = x$. Un simile elemento $x \in X$ si dice *punto fisso* di T.

3.1. Teorema delle contrazioni.

Definizione 3.1 (Contrazione). Sia (X, d) uno spazio metrico. Un'applicazione $T : X \to X$ è una *contrazione* se esiste un numero $0 < \lambda < 1$ tale che $d(T(x), T(y)) \leq \lambda d(x, y)$ per ogni $x, y \in X$.

Le contrazioni sono Lipschitziane e dunque uniformemente continue.

Teorema 3.2 (Banach). Sia (X, d) uno spazio metrico completo e sia $T : X \to X$ una contrazione. Allora esiste un unico punto $x \in X$ tale che $x = T(x)$.

Dim. Sia $x_0 \in X$ un qualsiasi punto e si definisca la successione $x_n = T^n(x_0) = T \circ \ldots \circ T(x_0)$, n-volte. Proviamo che la successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è di Cauchy. Infatti, per la disuguaglianza triangolare si ha per ogni $n, k \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} d(x_{n+k}, x_n) &\leq \sum_{h=1}^{k} d(x_{n+h}, x_{n+h-1}) = \sum_{h=1}^{k} d(T^{n+h}(x_0), T^{n+h-1}(x_0)) \\ &\leq d(T(x_0), x_0) \sum_{h=1}^{k} \lambda^{n+h-1} \leq \lambda^n d(T(x_0), x_0) \sum_{h=1}^{\infty} \lambda^{h-1}. \end{aligned}$$

La serie converge e $\lambda^n \to 0$ per $n \to \infty$, dal momento che $\lambda < 1$. Poichè X è completo, esiste un punto $x \in X$ tale che $x = \lim_{n\to\infty} T^n(x_0)$.

Proviamo che $x = T(x)$. La funzione $T : X \to X$ è continua e quindi abbiamo

$$x = \lim_{n\to\infty} T^n(x_0) = \lim_{n\to\infty} T(T^{n-1}(x_0)) = T(\lim_{n\to\infty} T^{n-1}(x_0)) = T(x).$$

Proviamo infine che il punto fisso è unico. Sia $\bar{x} \in X$ tale che $\bar{x} = T(\bar{x})$. Allora abbiamo

$$d(x, \bar{x}) = d(T(x), T(\bar{x})) \leq \lambda d(x, \bar{x}) \quad \Rightarrow \quad d(x, \bar{x}) = 0,$$

perchè $\lambda < 1$, e quindi $x = \bar{x}$.

□

La dimostrazione del Teorema di Banach è costruttiva e può essere implementata in un calcolatore.

Teorema 3.3. Sia (X, d) uno spazio metrico completo e sia $T : X \to X$ un'applicazione tale che per qualche $n \in \mathbb{N}$ l'iterazione T^n è una contrazione. Allora esiste un unico $x \in X$ tale che $x = T(x)$.

Dim. Per il Teorema di Banach esiste un unico $x \in X$ tale che $T^n(x) = x$. Allora, per qualche $0 \leq \lambda < 1$, si ha

$$d(x, T(x)) = d(T^n(x), T(T^n(x))) = d(T^n(x), T^n(T(x))) \leq \lambda d(x, T(x)),$$

e quindi $d(x, T(x)) = 0$, che è equivalente a $T(x) = x$.

Supponiamo che esista un secondo punto fisso $y \in X$, con $y = T(y)$. Allora si ha anche $y = T^n(y)$ e pertanto $x = y$, dall'unicità del punto fisso di T^n.

□

3.2. Teoremi di Brouwer e di Schauder.

TEOREMA 3.4 (Brouwer). Sia $K \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, una palla chiusa in e sia $T : K \to K$ continua. Allora esiste $x \in K$ tale che $T(x) = x$.

In questi casi, il punto fisso tipicamente non è unico. Per $n = 1$ il teorema precedente ha una dimostrazione elementare. Per $n = 2$, la dimostrazione migliore è si basa sulla nozione di omotopia. Per $n \geq 3$, esistono dimostrazioni basate sull'omologia. Per una dimostrazione analitica, si veda Evans, *Partial Differential Equations*, p.441. Il Teorema di Brouwer si estende alla dimensione infinita.

TEOREMA 3.5 (Schauder). Sia $(X, \|\cdot\|)$ uno spazio di Banach e sia $K \subset X$ un insieme non-vuoto, chiuso e convesso. Sia $T : K \to K$ un'applicazione tale che:
i) T è continua;
ii) $\overline{T(K)} \subset K$ è compatto.
Allora esiste $x \in K$ tale che $T(x) = x$.

Per una dimostrazione, si veda Evans, *Partial Differential Equations*, p.502.

4. Trasformazioni lineari e continue

Siano $(X, \|\cdot\|_X)$ e $(Y, \|\cdot\|_Y)$ due spazi normati reali. Per ogni trasformazione (operatore) lineare $T : X \to Y$ definiamo

$$\|T\| = \sup_{\|x\|_X \leq 1} \|Tx\|_Y.$$

Se $\|T\| < \infty$ diremo che T è una trasformazione *limitata* e chiameremo $\|T\|$ la *norma* di T. Indichiamo con

$$\mathcal{L}(X,Y) = \big\{T : X \to Y \,|\, \text{lineare e limitata}\big\},$$

l'insieme delle trasformazioni lineari e limitate da X a Y. Con le naturali operazioni di somma fra applicazioni e di moltiplicazione per uno scalare, $\mathcal{L}(X,Y)$ è uno spazio vettoriale reale. Osserviamo che dalla definizione di $\|T\|$ segue immediatamente la disuguaglianza

$$\|Tx\|_Y \leq \|T\|\|x\|_X, \quad x \in X. \tag{4.6}$$

Proviamo che $\|\cdot\|$ è una norma:
i) Se $T = 0$ è l'applicazione nulla, allora $\|T\| = 0$. Se viceversa $\|T\| = 0$ allora dalla (4.6) segue che $\|Tx\|_Y = 0$ per ogni $x \in X$, e quindi $T = 0$.
ii) Per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ si ha

$$\|\lambda T\| = \sup_{\|x\|_X \leq 1} \|(\lambda T)x\|_Y = \sup_{\|x\|_X \leq 1} \|\lambda(Tx)\|_Y = |\lambda| \sup_{\|x\|_X \leq 1} \|Tx\|_Y = |\lambda|\|T\|.$$

iii) Infine verifichiamo la subadditività. Se $T, S \in \mathcal{L}(X,Y)$ allora

$$\begin{aligned}\|T+S\| &= \sup_{\|x\|_X \leq 1} \|(S+T)x\|_Y = \sup_{\|x\|_X \leq 1} \|Sx + Tx\|_Y \\ &\leq \sup_{\|x\|_X \leq 1} \|Sx\|_Y + \|Tx\|_Y \leq \|S\| + \|T\|.\end{aligned}$$

PROPOSIZIONE 4.1. Sia $T : X \to Y$ lineare. Sono equivalenti le seguenti affermazioni:

A) T è limitata;
B) T è continua in 0;
C) T è continua da X a Y.

Dim. A)$\Rightarrow$C). Se T è limitata, allora per ogni punto $x_0 \in X$ si ha

$$\|Tx - Tx_0\|_Y = \|T(x - x_0)\|_Y \leq \|T\| \|x - x_0\|_X,$$

e quindi T è continua in x_0. In effetti, T è Lipschitziana.

C)$\Rightarrow$B) è banale. Proviamo che B)$\Rightarrow$A). Se T è continua in 0 allora per ogni $\varepsilon > 0$ (ad esempio per $\varepsilon = 1$) esiste $\delta > 0$ tale che

$$\|x\|_X \leq \delta \quad \Rightarrow \quad \|Tx\|_Y \leq \varepsilon = 1.$$

Dunque, se $\|x\|_X \leq 1$ si ha $\delta \|Tx\|_Y = \|T(\delta x)\|_Y \leq 1$, da cui $\|Tx\|_Y \leq 1/\delta$. Segue che $\|T\| \leq 1/\delta < \infty$.

□

Osservazione 4.2. Alla luce della proposizione precedente, possiamo equivalentemente definire

$$\mathcal{L}(X, Y) = \big\{T : X \to Y \,|\, \text{lineare e continua}\big\}.$$

Osservazione 4.3. Se X e Y sono di dimensione finita, allora la linearità implica automaticamente la continuità. Questo segue dal fatto che una trasformazione lineare $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ è della forma

$$T(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i,$$

per opportuni $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, ovvero è un polinomio omogeneo di grado 1.

Qundo X oppure Y (oppure entrambi) non sono di dimensione finita, allora la linearità non implica la limitatezza (Esercizio 35).

Esempio 4.4. Sia $X = C([0, 1])$ munito della sup-norma e sia $Y = \mathbb{R}$. La trasformazione $T : X \to \mathbb{R}$

$$T(f) = \int_0^1 f(t) dt$$

è lineare, in quanto l'integrale di Riemann è lineare. Inoltre, T è ovviamente anche limitato

$$|T(f)| = \Big| \int_0^1 f(t) dt \Big| \leq \int_0^1 |f(t)|\, dt \leq \|f\|_\infty,$$

e dunque è continuo, $T \in \mathcal{L}(X, \mathbb{R}) = X^*$, dove con X^* si indica il duale di X.

Gli argomenti di questa sezione e della precedente sono il punto di partenza del corso di *Analisi funzionale*.

5. Caratterizzazione degli spazi metrici compatti

Proposizione 5.1. Sia (X, d) uno spazio metrico completo e siano $K_n \subset X$, $n \in \mathbb{N}$, insiemi chiusi non vuoti tali che $K_{n+1} \subset K_n$ e $\mathrm{diam}(K_n) \to 0$ per $n \to \infty$. Allora esiste $x \in X$ tale che

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n = \{x\}.$$

Dim. Selezioniamo punti $x_n \in K_n \neq \emptyset$, $n \in \mathbb{N}$, a nostro piacere. La successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ di di Cauchy, infatti se $m \geq n$ allora $x_n, x_m \in K_n$ e dunque

$$d(x_m, x_n) \leq \operatorname{diam}(K_n) < \varepsilon$$

per ogni $n \in \mathbb{N}$ sufficientemente grande. Per la completezza di X, esiste $x \in X$ tale che $x_n \to x$ per $n \to \infty$. Siccome $x_m \in K_n$ per ogni $m \geq n$, dalla caratterizzazione sequenziale della chiusura di K_n segue che $x \in K_n$, per ogni $n \in \mathbb{N}$ e dunque

$$x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} K_n.$$

Se, poi, y è un altro punto nell'interesezione, allora $x, y \in K_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e dunque $d(x, y) \leq \operatorname{diam}(K_n)$. Deve dunque esssere $d(x, y) = 0$, ovvero $x = y$.

□

Ricordiamo la definizione di spazio metrico totalmente limitato.

Definizione 5.2 (Totale limitatezza). Uno spazio metrico (X, d) si dice *totalmente limitato* se per ogni $r > 0$ esistono $x_1, \ldots, x_n \in X$, $n \in \mathbb{N}$, tali che $X = \bigcup_{i=1}^{n} B_r(x_i)$.

Teorema 5.3. Sia (X, d) uno spazio metrico. Sono equivalenti le seguenti affermazioni:

i) X è compatto.
ii) Ogni insieme $A \subset X$ con $\operatorname{Card}(A) = \infty$ ha un punto di accumulazione.
iii) X è sequenzialmente compatto.
iv) X è completo e totalmente limitato.

Dim. i) ⇒ ii). Sia X compatto e sia $A \subset X$ un sottoinsieme con cardinalità $\operatorname{Card}(A) = \infty$. Supponiamo per assurdo che A non abbia punti di accumulazione. Allora per ogni $x \in X$ esiste $r_x > 0$ tale che

$$B_{r_x}(x) \setminus \{x\} \cap A = \emptyset.$$

Dal momento che $X = \bigcup_{x\in X} B_{r_x}(x)$ è un ricoprimento aperto, dalla compattezza di X segue che esistono finiti punti $x_1, \ldots, x_n \in X$ tali che $X = \bigcup_{i=1}^{n} B_{r_{x_i}}(x_i)$. Da ciò segue che

$$A = A \cap X = \bigcup_{i=1}^{n} A \cap B_{r_{x_i}}(x_i) \subset \bigcup_{i=1}^{n} \{x_i\},$$

ed A è un insieme finito. Questo è assurdo.

ii) ⇒ iii). Sia $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione in X. Se la cardinalità dell'insieme $A = \{x_n \in X : n \in \mathbb{N}\}$ è finita allora la successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ha una sottosuccessione costante. Se la cardinalità di A non è finita, allora esiste $x \in X$ punto di accumulazione di A. Allora per ogni $k \in \mathbb{N}$ esiste $n_k \in \mathbb{N}$ tale che $x_{n_k} \in B_{1/k}(x)$. Inoltre, la scelta di n_k può essere fatta in modo tale da avere una selezione crescente di indici $k \mapsto n_k$. La sottosuccesione $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ converge ad x.

iii) $\Rightarrow$ iv). Proviamo che X è completo. Sia $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di Cauchy. Per ipotesi esiste una sottosuccessione $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ che converge ad un punto $x \in X$. Ma allora, fissato $\varepsilon > 0$ esistono $\bar{n}, \bar{k} \in \mathbb{N}$ tali che

$$d(x, x_n) \leq d(x, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, x_n) \leq 2\varepsilon$$

non appena $k \geq \bar{k}$ e $n, n_k \geq \bar{n}$. Questo prova che $x_n \to x$ in X per $n \to \infty$.

Proviamo che X è totalmente limitato. Supponiamo per assurdo che esista $r > 0$ tale che non ci sia un ricoprimento finito di X con palle di raggio r.

Prendiamo $x_1 \in X$, $x_2 \in X \setminus B_r(x_1)$ e per induzione $x_n \in X \setminus \displaystyle\bigcup_{i=1}^{n-1} B_r(x_i)$. La successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ verifica $d(x_n, x_m) \geq r$ per ogni $n \neq m$, e dunque non può avere sottosuccessioni convergenti.

iv) $\Rightarrow$ i). Questa è la parte più significativa della dimostrazione.

Supponiamo per assurdo che X non sia compatto. Allora c'è un ricoprimento aperto di X, sia esso $\{A_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$, che non ha alcun sottoricoprimento finito.

Per la totale limitatezza, esistono palle $B^1_1, \dots, B^1_{n_1}$ di raggio 1 tali che $X = \bigcup_{i=1}^{n_1} B^1_i$. Senza perdere di generalità possiamo supporre qui e nel seguito che le palle siano chiuse. In particolare, esiste una palla $B^1_{i_1}$, $1 \leq i_1 \leq n_1$, che non è ricoperta da un numero finito di aperti A_α. L'insieme $B^1_{i_1}$ è totalmente limitato, e quindi esistono palle $B^2_1, \dots, B^2_{n_2}$ relative a $B^1_{i_1}$ di raggio $1/2$ tali che $B^1_{i_1} \subset \bigcup_{i=1}^{n_2} B^2_i$. Esiste un insieme $B^2_{i_2}$ che non può essere ricoperto da un numero finito di insiemi aperti A_α.

Ora procediamo per induzione. Per ogni $k \in \mathbb{N}$ esiste una palla chiusa $B^k_{i_k}$ relativa a $B^{k-1}_{i_{k-1}}$, con raggio $1/k$ che non può essere ricoperta con un numero finito di insiemi aperti A_α.

Poichè X è completo, la successione decrescente di insiemi chiusi $(B^k_{i_k})_{k\in\mathbb{N}}$ ha intersezione non vuota. Dunque esiste $x \in \bigcap_{k=1}^{\infty} B^k_{i_k}$. D'altra parte, $x \in A_\alpha$ per qualche $\alpha \in \mathcal{A}$ ed esiste dunque $r > 0$ tale che $B_r(x) \subset A_\alpha$. Se ora $k \in \mathbb{N}$ è tale che $1/k < r/2$ allora $B^k_{i_k} \subset B_r(x) \subset A_\alpha$. Questa è una contraddizione, perchè $B^k_{i_k}$ non può essere ricoperto da un numero finito di insiemi A_α. $\square$

6. Insiemi connessi

Questi argomenti verrano illustrati nel corso di Geometria 2, nel contesto degli spazi topologici.

Definizione 6.1 (Spazio connesso). Uno spazio metrico (X, d) si dice connesso se la scomposizione $X = A_1 \cup A_2$ con A_1, A_2 aperti tali che $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ implica che $A_1 = \emptyset$ oppure $A_2 = \emptyset$.

Se X non è connesso allora esistono due insiemi aperti disgiunti e non-vuoti A_1 e A_2 tali che $X = A_1 \cup A_2$. Quindi $A_1 = X \setminus A_2$ e $A_2 = X \setminus A_1$ sono contemporaneamente aperti e chiusi. Se X è connesso $\emptyset$ e X sono gli unici insiemi ad essere sia aperti che chiusi.

Sia (X, d) uno spazio metrico e sia $Y \subset X$ un suo sottoinsieme. Allora (Y, d) è ancora uno spazio metrico che avrà la sua topologia $\tau(Y)$, che si dice *topologia indotta* da X su Y o *topologia relativa.*

Esercizio 21. Sia $Y \subset X$ con la topologia relativa. Provare che un insieme $A \subset Y$ è aperto in Y se e solo se esiste un insieme aperto $B \subset X$ tale che $A = Y \cap B$.

Esempio 6.2. Sia $X = \mathbb{R}$ e $Y = [0,1]$. L'insieme $[0,1/2) \subset [0,1]$ è relativamente aperto in $[0,1]$ in quanto $[0,1/2) = [0,1] \cap (-\infty, 1/2)$.

Definizione 6.3. Sia (X,d) uno spazio metrico. Un sottoinsieme $Y \subset X$ si dice *connesso* se è connesso rispetto alla topologia indotta. Precisamente, se $Y = (Y \cap A_1) \cup (Y \cap A_2)$ con A_1, A_2 aperti di X e unione disgiunta, allora $Y \cap A_1 = \emptyset$ oppure $Y \cap A_2 = \emptyset$.

Esempio 6.4. Sia $\mathbb{R}$ munito della distanza Euclidea.

1) L'insieme $A \subset \mathbb{R}$, $A = [-2,-1] \cup [1,2]$ non è connesso in $\mathbb{R}$. Infatti la seguente unione è disgiunta:
$$A = (A \cap (-3,0)) \cup (A \cap (0,3)).$$
2) L'intervallo $I = [0,1] \subset \mathbb{R}$ è connesso. Proviamo questo fatto. Siano A_1, A_2 aperti di $\mathbb{R}$ tali che:
$$I = (I \cap A_1) \cup (I \cap A_2).$$
con unione disgiunta. Supponiamo ad esempio che $0 \in A_1$. Definiamo
$$\bar{x} = \sup\big\{x \in [0,1] : [0,x) \subset I \cap A_1\big\}.$$
Deve essere $0 < \bar{x} \leq 1$. Se fosse $\bar{x} \in A_2$ allora $\bar{x} - \varepsilon \in I \cap A_2$ per qualche $\varepsilon > 0$ ma allora $I \cap A_1 \cap A_2 \neq \emptyset$. Questo non è possibile. Quindi $\bar{x} \in I \cap A_1$.
Se $\bar{x} < 1$ allora esiste $\delta > 0$ tale che $\bar{x} + \varepsilon \in A_1 \cap I$ per ogni $0 < \varepsilon < \delta$. Dunque $[\bar{x}, \delta) \subset A_1$ e questo contraddice la definizione di $\bar{x}$. Quindi $\bar{x} = 1$ e dunque $I \subset A_1$ e quindi $I \cap A_2 = \emptyset$. Altrimenti $(I \cap A_1) \cap (I \cap A_2) \neq \emptyset$.

Teorema 6.5. Siano (X, d_X) e (Y, d_Y) due spazi metrici e sia $f : X \to Y$ continua. Se X è connesso allora $f(X) \subset Y$ è connesso.

Dim. Siano $A_1, A_2 \subset Y$ insiemi aperti tali che
$$f(X) = (f(X) \cap A_1) \cup (f(X) \cap A_2)$$
con unione disgiunta. Allora
$$\begin{aligned} X = f^{-1}(f(X)) &= f^{-1}((f(X) \cap A_1) \cup (f(X) \cap A_2)) \\ &= f^{-1}(f(X) \cap A_1) \cup f^{-1}(f(X) \cap A_2)) \\ &= (X \cap f^{-1}(A_1)) \cup (X \cap f^{-1}(A_2)) = f^{-1}(A_1) \cup f^{-1}(A_2). \end{aligned}$$
L'ultima unione è disgiunta e gli insiemi $f^{-1}(A_1)$, $f^{-1}(A_2)$ sono aperti. Siccome X è connesso deve essere $f^{-1}(A_1) = \emptyset$ oppure $f^{-1}(A_2) = \emptyset$. Dunque, si ha $f(X) \cap A_1 = \emptyset$ oppure $f(X) \cap A_2 = \emptyset$.

□

Definizione 6.6 (Spazio connesso per archi). Uno spazio metrico (X,d) si dice *connesso per archi* se per ogni coppia di punti $x, y \in X$ esiste una curva continua $\gamma : [0,1] \to X$ tale che $\gamma(0) = x$ e $\gamma(1) = y$.

Teorema 6.7. Se uno spazio metrico (X,d) è connesso per archi allora è connesso.

Dim. Supponiamo per assurdo che X non sia connesso. Allora esistono due aperti A_1, A_2 disgiunti e non vuoti tali che $X = A_1 \cup A_2$. Siano $x \in A_1$ e $y \in A_2$, e sia $\gamma : [0,1] \to X$ una curva continua tale che $\gamma(0) = x$ e $\gamma(1) = y$. Ma allora

$$[0,1] = ([0,1] \cap \gamma^{-1}(A_1)) \cup ([0,1] \cap \gamma^{-1}(A_2))$$

con unione disgiunta e $\gamma^{-1}(A_1))$ e $\gamma^{-1}(A_2)$ aperti non vuoti in $[0,1]$. Questo è assurdo.

□

Esercizio 22. Si consideri il seguente sottoinsieme del piano:

$$A = \big\{(x, \sin(1/x)) \in \mathbb{R}^2 : x \in (0,1]\big\} \cup \big\{(0,y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [-1,1]\big\}$$

con la topologia indotta dal piano. Provare che A è connesso ma non è connesso per archi.

Esempio 6.8.

1) $\mathbb{R}^n$ è connesso per ogni $n \geq 1$.
2) $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ è connesso per $n \geq 2$ ma non è connesso per $n = 1$.
3) $\mathbb{R}^n \setminus \{x \in \mathbb{R}^n : x_n = 0\}$ non è connesso, $n \geq 1$.
4) $\mathbb{R}^n \setminus \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\}$ non è connesso, $n \geq 1$.

Teorema 6.9. Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ un aperto connesso (non vuoto). Allora A è connesso per archi.

Dim. Dimostreremo un'affermazione più precisa: A è connesso per curve poligonali. Sia $x_0 \in A$ un punto scelto a nostro piacere. Definiamo il seguente insieme

$$A_1 = \big\{x \in A : x \text{ si connette a } x_0 \text{ con una curva poligonale contenuta in } A\big\}.$$

Proviamo che A_1 è aperto. Infatti, se $x \in A_1 \subset A$ allora esiste $\varepsilon > 0$ tale che $B_\varepsilon(x) \subset A$, in quanto A è aperto. Ogni punto di $y \in B_\varepsilon(x)$ si collega al centro x con un segmento contenuto in A. Dunque y si collega a x_0 con una curva poligonale contenuta in A, ovvero $B_\varepsilon(x) \subset A_1$.

Sia $A_2 = A \setminus A_1$. Proviamo che anche A_2 è aperto. Se $x \in A_2 \subset A$ allora esiste $\varepsilon > 0$ tale che $B_\varepsilon(x) \subset A$. Affermiamo che $B_\varepsilon(x) \subset A_2$. Se così non fosse troveremmo $y \in B_\varepsilon(x) \cap A_1$. Il punto x_0 si collega a y con una curva poligonale in A ed y si collega ad x con un segmento contenuto in A. Quindi $x \in A_1$, che non è possibile. Questo argomento prova che A_2 è aperto. Allora abbiamo

$$X = A_1 \cup A_2$$

con A_1 e A_2 aperti ed unione disgiunta. Siccome X è connesso, uno degli aperti deve essere vuoto. Siccome $A_1 \neq \emptyset$ allora $A_2 = \emptyset$. Questo termina la dimostrazione.

□

Teorema 6.10 (Valori intermedi). Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ un aperto connesso e sia $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Allora per ogni $t \in (\inf_A f, \sup_A f)$ esiste un punto $x \in A$ tale che $f(x) = t$.

Dim. Siano $x_0, x_1 \in A$ tali che $f(x_0) < t < f(x_1)$. Sia $\gamma : [0,1] \to A$ una curva continua tale che $\gamma(0) = x_0$ e $\gamma(1) = x_1$. La composizione $\varphi(s) = f(\gamma(s))$, $s \in [0,1]$, è continua. Per il Teorema dei valori intermedi in una dimensione esiste $s \in (0,1)$ tale che $\varphi(s) = t$. Il punto $x = \gamma(s) \in A$ verifica la tesi del teorema.

□

7. Esercizi

7.1. Spazi normati.

Esercizio 23. Siano $1 < p, q < \infty$ tali che $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Provare la disuguaglianza

$$t \le \frac{1}{p} t^p + \frac{1}{q}, \quad t \ge 0,$$

e dedurre che

$$st \le \frac{t^p}{p} + \frac{s^q}{q}, \quad s, t \ge 0.$$

Infine, provare la disuguaglianza di Minkowski:

$$\langle x, y \rangle \le \|x\|_p \|y\|_q, \quad x, y \in \mathbb{R}^n, \tag{7.7}$$

che vale anche nel caso $p = 1$ e $q = \infty$. Si tratta di una generalizzazione della disuguaglianza di Cauchy-Schwarz.

Esercizio 24. Provare che $C^1([0, 1])$ con la norma

$$\|f\|_{C^1} = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$$

è uno spazio di Banach. Provare che $C^1([0, 1])$ con la norma

$$\|f\|_{C^1,*} = |f(0)| + \|f'\|_\infty,$$

pure è uno spazio di Banach. Provare che le due norme sono equivalenti.

7.2. Contrazioni e punti fissi.

Esercizio 25. Determinare tutti i numeri $\alpha \ge 0$ tali che la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \sqrt{1 + \alpha x^2}, \quad x \in \mathbb{R},$$

sia una contrazione rispetto alla distanza Euclidea.

Esercizio 26. Sia $X = C([0, 1])$ con la sup-norma. Provare che per $\alpha > 0$, la funzione $T : X \to X$

$$T(f)(x) = \mathrm{e}^{-\alpha x} \int_0^x \mathrm{e}^{\alpha t} f(t)\, dt$$

è una contrazione.

Esercizio 27. Sia $h \in C([0, 1])$ una funzione assegnata. Verificare che l'equazione funzionale

$$f(x) = h(x) + \frac{1}{2} \sin(x) \int_0^x f(t) dx, \quad x \in [0, 1],$$

ha una soluzione unica $f \in C([0, 1])$.

Esercizio 28. Sia $\alpha \in \mathbb{R}$ e si consideri l'equazione

$$\sin x + \int_0^x \sqrt{1 + f'(t)^2} dt = \alpha f(x), \quad x \in [0, 1].$$

i) Provare che per $|\alpha| > 1$ l'equazione ha un'unica soluzione $f \in C^1([0, 1])$.
ii) Provare che per $|\alpha| \le 1$ l'equazione non ha soluzione.

Esercizio 29. Siano $\lambda \in \mathbb{R}$ e $b \in \mathbb{R}^n$ e consideriamo la funzione $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

$$T(x) = \lambda x + b, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

1) Calcolare una formula per l'iterazione $T^k(x_0) = T \circ ... \circ T(x_0)$ k volte, dove $x_0 \in \mathbb{R}^n$ è un punto fissato;
2) Stabilire per quali valori di λ la trasformazione T è una contrazione rispetto alla distanza Euclidea e per tali valori calcolare il limite di $T^k(x_0)$ per $k \to \infty$.

Esercizio 30. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione con costante di Lipschitz $L = \mathrm{Lip}(f) < 1$. Provare che la funzione $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$F(x, y) = \big(x + f(y), y + f(x)\big), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

è iniettiva e suriettiva.

Esercizio 31. Si considerino il quadrato $Q = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 1 \text{ e } |y| \leq 1\}$ e la funzione $f : Q \to \mathbb{R}^2$ così definita

$$f(x, y) = \Big(\frac{1}{6}(1 - y - y^2), \frac{1}{6}(x^2 - x - 1)\Big).$$

1) Provare che $f(Q) \subset Q$.
2) Usando il teorema delle contrazioni, provare che il sistema di equazioni

$$\begin{cases} 6x = 1 - y - y^2 \\ 6y = x^2 - x - 1 \end{cases}$$

ha una soluzione unica $(x, y) \in Q$.

Esercizio 32. Per $n \geq 1$ siano $B = \big\{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq 1\big\}$ e $x_0 \in B$ tale che $|x_0| \leq \frac{1}{12}$. Sia poi $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ la funzione

$$T(x) = \frac{1}{4}x + \frac{1}{9}|x|^2 x + x_0.$$

1) Provare che T trasforma B in se, ovvero che $T(B) \subset B$.
2) Provare che l'equazione $T(x) = x$ ha una soluzione unica $x \in B$.

Esercizio 33. Sia X uno spazio metrico compatto e sia $T : X \to X$ un'applicazione tale che $d(T(x), T(y)) < d(x, y)$ per ogni $x, y \in X$ tali che $x \neq y$. Provare che T ha un unico punto fisso su X.

7.3. Trasformazioni lineari.

Esercizio 34. Sia $X = C([0, 1])$ munito della sup-norma e sia $T : X \to \mathbb{R}$ l'applicazione

$$T(f) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n} f\big(1/n\big).$$

i) Provare che $T \in \mathcal{L}(X, \mathbb{R})$;
ii) Calcolare $\|T\|$;
iii) Stabilire se esiste una funzione $f \in X$ con $\|f\|_\infty \leq 1$ tale che $T(f) = \|T\|$.

Esercizio 35. Sia $X = \{f \in C^1([-\pi,\pi]) : f(-\pi) = f(\pi)\}$ munito della norma $\|\cdot\|_\infty$. Sia $T : X \to \mathbb{R}$ la trasformazione

$$T(f) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx.$$

1) Provare che la serie che definisce $T(f)$ converge e che T è lineare.
2) Provare che T non è limitata da $(X, \|\cdot\|_\infty)$ in $\mathbb{R}$.

Esercizio 36. Siano X e Y spazi normati. Provare che se Y è completo, allora anche $\mathcal{L}(X,Y)$ è completo, con la norma operatoriale.

Esercizio 37. Sia $X = C([0,1])$ munito della sup-norma, e sia $k : [0,1]\times[0,1] \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Definiamo l'applicazione $T : X \to X$

$$T(f)(s) = \int_0^1 k(s,t)f(t)\,dt, \quad f \in X.$$

i) Provare che $s \mapsto T(f)(s)$ è continua su $[0,1]$.
ii) Provare che $T \in \mathcal{L}(X,X)$.
iii) Dare condizioni su k affinchè T sia una contrazione.

7.4. Altri esercizi.

Esercizio 38. Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ un insieme non-vuoto e definiamo la funzione distanza

$$f(x) = \mathrm{dist}(x,A) = \inf_{y\in A} |x-y|, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Provare che f è 1-Lipschitziana.

Esercizio 39. Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ un insieme chiuso e sia $x \in \mathbb{R}^n$. Un punto $\bar{x} \in A$ si dice proiezione metrica di $x \in \mathbb{R}^n$ su A se $|x-\bar{x}| = \mathrm{dist}(x,A)$. Provare che ogni punto $x \in \mathbb{R}^n$ ha almeno una proiezione metrica. Provare che se A è convesso allora la proiezione metrica è unica.

Esercizio 40. Sia $f \in C^1(\mathbb{R})$ e consideriamo il sottografico $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq f(x)\}$. È vero che ogni $p \in \partial A$ è proiezione metrica di almeno un punto $q \in \mathbb{R}^2 \setminus A$?

Rispondere alla stessa domanda con $f \in C^2(\mathbb{R})$.

Esercizio 41. Per ogni $x \in \mathbb{R}^n$ sia $A(x) = (a_{ij}(x))_{i,j=1,\dots,n}$ una matrice $n \times n$ simmetrica tale che $x \mapsto A(x)$ sia continua, ovvero $x \mapsto a_{ij}(x)$ è continua per ogni $i,j = 1,...,n$. Siano $\lambda_1(x) \leq ... \leq \lambda_n(x) \in \mathbb{R}$ gli autovalori di $A(x)$. Per ogni vettore $v \in \mathbb{R}^n$ e per ogni $x \in \mathbb{R}^n$ vale

$$\lambda_1(x)|v|^2 \leq \langle A(x)v, v\rangle \leq \lambda_n(x)|v|^2.$$

Supponiamo che $\lambda_1 \geq 0$. Per ogni curva $\gamma \in C^1([0,1];\mathbb{R}^n)$, o più in generale C^1 a tratti su $[0,1]$, definiamo la lunghezza

$$\ell(\gamma) = \int_0^1 \langle A(\gamma(t))\dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t)\rangle^{1/2} dt.$$

Quando $A(x)$ è la matrice identità si ottiene la lunghezza Euclidea di γ.

Dati due punti $x, y \in \mathbb{R}^n$ definiamo

$$d(x, y) = \inf \big\{ \ell(\gamma) : \gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}^n \ C^1 \text{ a tratti con } \gamma(0) = x \text{ e } \gamma(1) = y \big\}.$$

1) Supponiamo che esista $m > 0$ tale che $\lambda_1(x) \geq m$ per ogni $x \in \mathbb{R}^n$. Provare che $(\mathbb{R}^n, d)$ è uno spazio metrico.
2) Supponiamo in aggiunta che esista $M > 0$ tale che $\lambda_n(x) \leq M$ per ogni $x \in \mathbb{R}^n$. Provare che $(\mathbb{R}^n, d)$ è uno spazio metrico completo.

Lo spazio metrico $(\mathbb{R}^n, d)$ è un esempio di "varietà Riemanniana".

CAPITOLO 4

Calcolo differenziale in più variabili

1. Derivate parziali e derivate direzionali in $\mathbb{R}^n$

Fissiamo su $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, la base canonica $\mathrm{e}_1, \dots, \mathrm{e}_n$, dove, per ogni $i = 1, \dots, n$, si ha

$$\mathrm{e}_i = \big(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0\big) \in \mathbb{R}^n,$$

con 1 nella posizione i-esima.

Definizione 1.1 (Derivata parziale). Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ un insieme aperto. Diciamo che una funzione $f : A \to \mathbb{R}$ ha derivata parziale i-esima, $i = 1, \dots, n$, nel punto $x \in A$ se esiste finito il limite

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x + t\mathrm{e}_i) - f(x)}{t}.$$

Diremo che f è *derivabile in* x se esistono tutte le derivate parziali $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x)$ per ogni $i = 1, \dots, n$.

Osserviamo che, essendo A aperto ed $x \in A$, si ha $x + t\mathrm{e}_i \in A$ per ogni t sufficientemente piccolo e quindi il limite che definisce la derivata parziale è ben definito.

Esempio 1.2. Le derivate parziali si calcolano con le regole del calcolo differenziale di una variabile. Sia ad esempio $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione

$$f(x, y) = \mathrm{e}^{x^2} \sin y, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Allora le derivate parziali esistono in ogni punto e sono

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x\mathrm{e}^{x^2} \sin y, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \mathrm{e}^{x^2} \cos y.$$

Esempio 1.3. La funzione $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x| = (x_1^2 + \ldots + x_n^2)^{1/2}$, non è derivabile in $x = 0$. Per $x \neq 0$, f è invece derivabile e inoltre

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \frac{x_i}{|x|}, \quad x \neq 0.$$

Osservazione 1.4. Nella letteratura si incontrano le seguenti notazioni alternative per indicare le derivate parziali

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \partial_i f = \partial_{x_i} f = D_i f = f_{x_i}.$$

Osservazione 1.5 (Significato geometrico delle derivate parziali). Consideriamo una funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ derivabile nel punto $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Le due curve $\gamma_1, \gamma_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$

$$\gamma_1(t) = \big(x + t, y, f(x + t, y)\big), \quad \gamma_2(t) = \big(x, y + t, f(x, y + t)\big), \quad t \in \mathbb{R},$$

sono derivabili in $t = 0$ e i vettori in $\mathbb{R}^3$

$$\gamma_1'(0) = (1, 0, f_x(x, y)\big), \quad \gamma_2'(0) = (0, 1, f_y(x, y)\big)$$

sono linearmente indipendenti e generatono dunque un piano 2-dimensionale in $\mathbb{R}^3$. Questo è il *candidato* piano tangente al grafico di

$$\mathrm{gr}(f) = \big\{(x, y, f(x, y)) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in \mathbb{R}^2\big\}$$

nel punto $(0, f(0)) \in \mathrm{gr}(f)$.

Definizione 1.6 (Gradiente). Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ un aperto e sia $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile nel punto $x \in A$. Il vettore

$$Df(x) = \nabla f(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x)\right) \in \mathbb{R}^n$$

si dice *gradiente di f in x*.

Osservazione 1.7 (Significato geometrico del gradiente). Supponiamo che sia $\nabla f(x) \neq 0$. Il vettore $\nabla f(x)$ contiene due informazioni:

i) Il versore orientato $\nabla f(x)/|\nabla f(x)|$ indica la direzione orientata di massima crescita della funzione f.
ii) La lunghezza $|\nabla f(x)|$ misura la velocità di crescita.

Lasciamo, per ora, tali affermazioni alla loro vaghezza.

Definizione 1.8 (Derivata direzionale). Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ un insieme aperto. Diciamo che una funzione $f : A \to \mathbb{R}$ ha derivata direzionale nella direzione $v \in \mathbb{R}^n$ nel punto $x \in A$ se esiste finito il limite

$$f_v(x) = \frac{\partial f}{\partial v}(x) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x + tv) - f(x)}{t}.$$

Esempio 1.9. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione definita nel seguente modo

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^4 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0 & x = y = 0. \end{cases}$$

Calcoliamo le derivate direzionali di f in $0 \in \mathbb{R}^2$ in una generica direzione $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ con $v \neq 0$:

$$\frac{\partial f}{\partial v}(0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(tv) - f(0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{v_1^2 v_2}{t^2 v_1^4 + v_2^2}.$$

Quando $v_1 = 0$ oppure $v_2 = 0$ il limite è certamente 0. Dunque, si trova in particolare

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0) = 0.$$

Inoltre, quando $v_2 \neq 0$ si ha

$$\frac{\partial f}{\partial v}(0) = \lim_{t\to 0} \frac{v_1^2 v_2}{t^2 v_1^4 + v_2^2} = \frac{v_1^2}{v_2}.$$

Osserviamo che il limite ottenuto non è un'espressione lineare in v.

La funzione f, dunque, ha derivata direzionale in 0 in ogni direzione. Tuttavia, f non è continua in 0, dal momento che per ogni $m \in \mathbb{R}$ risulta

$$\lim_{t\to 0} f(t, mt^2) = \frac{m}{1+m^2}$$

e il valore del limite dipende dall'apertura della parabola.

Nel grafico di f

$$\mathrm{gr}(f) = \big\{(x, y, f(x, y)) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in \mathbb{R}^2\big\}$$

c'è uno "strappo" nel punto $0 \in \mathrm{gr}(f)$. Questo impedisce l'esistenza di un "piano tangente" al grafico, comunque si intenda la nozione di "piano tangente".

In conclusione, la nozione di funzione derivabile è naturale ed utile. Tuttavia è insoddisfacente per almeno due motivi: per $n \geq 2$ la derivabilità (anche in tutte le direzioni) non implica la continuità; sempre per $n \geq 2$ la derivabilità non implica l'esistenza di un piano tangente al grafico della funzione.

2. Funzioni a valori vettoriali

Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ un insieme aperto e consideriamo una funzione $f : A \to \mathbb{R}^m$, $m \geq 1$. Avremo $f = (f_1, \ldots, f_m)$ dove $f_j : A \to \mathbb{R}$, $j = 1, \ldots, m$, sono le funzioni coordinate di f. D'ora in avanti, ci atterremo alla convenzione di rappresentare f come un vettore colonna

$$f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_m \end{pmatrix}. \tag{2.8}$$

Diciamo che f è derivabile in un punto $x \in A$ se ciascuna coordinata $f_1, \ldots, f_m$ è derivabile in x. In questo caso, scriveremo

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_i}(x) \\ \vdots \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial x_i}(x) \end{pmatrix}, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Definizione 2.1 (Matrice Jacobiana). Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ un aperto e sia $f : A \to \mathbb{R}^m$ una funzione derivabile nel punto $x \in A$. La matrice

$$J_f(x) = Jf(x) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \ldots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial x_1}(x) & \ldots & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nabla f_1(x) \\ \vdots \\ \nabla f_m(x) \end{pmatrix}$$

si dice *matrice Jacobiana di f in x*. La matrice $Jf(x)$ ha m righe and n colonne.

Il significato geometrico della matrice Jacobiana è più recondito. Ritorneremo su questo punto nel Capitolo **??**.

3. Richiami di algebra lineare

Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una trasformazione lineare, $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$. Fissiamo le basi

$$\begin{aligned} &\mathrm{e}_1, \ldots, \mathrm{e}_n \quad \text{base canonica di } \mathbb{R}^n, \\ &\mathrm{e}_1, \ldots, \mathrm{e}_m \quad \text{base canonica di } \mathbb{R}^m. \end{aligned}$$

Siano $T_{ij} \in \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, m$ e $j = 1, \ldots, n$, i numeri reali definiti tramite la seguente relazione

$$T\mathrm{e}_j = \sum_{i=1}^m T_{ij}\mathrm{e}_i, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Esiste una corrispondenza biunivoca fra la trasformazione lineare T e la matrice $(T_{ij})_{\substack{i=1,\ldots,m \\ j=1,\ldots,n}}$. Scriviamo il punto $x \in \mathbb{R}^n$ come vettore colonna

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n.$$

Avremo allora, con la notazione di prodotto righe-colonne,

$$T(x) = Tx = \begin{pmatrix} T_{11} & \ldots & T_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ T_{m1} & \ldots & T_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \displaystyle\sum_{j=1}^n T_{1j}x_j \\ \vdots \\ \displaystyle\sum_{j=1}^n T_{mj}x_j \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n.$$

La corrispondenza fra T e la matrice $(T_{ij})_{\substack{i=1,\ldots,m \\ j=1,\ldots,n}}$ dipende dalla scelta delle basi canoniche su $\mathbb{R}^n$ ed $\mathbb{R}^m$.

4. Funzioni differenziabili

In questa sezione introduciamo la definizione di funzione *differenziabile.*

Definizione 4.1 (Differenziale). Sia $A \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, un insieme aperto. Una funzione $f : A \to \mathbb{R}^m$, $m \geq 1$, si dice *differenziabile* (o Fréchet-differenziabile) in un punto $x_0 \in A$ se esiste una trasformazione lineare $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ tale che

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - T(x - x_0)}{|x - x_0|} = 0. \tag{4.9}$$

Chiameremo la trasformazione lineare

$$df(x_0) = T$$

il *differenziale di f in x_0*.

Osservazione 4.2. Lasciamo al lettore il compito di verificare le seguenti affermazioni.

1. Unicità del differenziale. Se il differenziale esiste allora esso è unico. Precisamente, se $T, \widehat{T} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ sono trasformazioni lineari che verificano (4.9) (per lo stesso punto x_0), allora $T = \widehat{T}$. Infatti, per ogni $v \in \mathbb{R}^n$ si ha

$$Tv = \lim_{t \to 0^+} \frac{f(x_0 + tv) - f(x_0)}{t}$$

e l'unicità di T segue dall'unicità del limite.

2. Caso $n = 1$. Quando $n = 1$ (e indipendentemente da $m \geq 1$), le nozioni di derivabilità e differenziabilità coincidono e inoltre

$$df(x_0) = f'(x_0) \quad \text{come vettori di } \mathbb{R}^m.$$

La verifica di queste affermazioni è lasciata come esercizio.

3. Differenziale di una trasformazione lineare. Se $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ è lineare, allora $df(x_0) = f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ in ogni punto $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Questo segue in modo elementare dal fatto che per ogni $x \in \mathbb{R}^n$ si ha

$$f(x) - f(x_0) - df(x_0)(x - x_0) = f(x) - f(x_0) - f(x - x_0) = 0.$$

4. Caso vettoriale. Una funzione f a valori in $\mathbb{R}^m$ è differenziabile se e solo se le sue m coordinate sono differenziabili.

La Definizione 4.1 ha una generalizzazione naturale nell'ambito degli spazi normati.

Definizione 4.3. Siano $(X, \|\cdot\|_X)$ e $(Y, \|\cdot\|_Y)$ due spazi normati, e sia $A \subset X$ un aperto. Una funzione $f : A \to Y$ si dice *Fréchet-differenziabile* in un punto $x_0 \in A$ se esiste una trasformazione lineare e continua $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ tale che

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\|f(x) - f(x_0) - T(x - x_0)\|_Y}{\|x - x_0\|_Y} = 0. \tag{4.10}$$

La trasformazione lineare $df(x_0) = T$ si chiama il *differenziale di f in x_0*.

Il differenziale è per definizione una trasformazione lineare e *continua*.

Teorema 4.4 (Caratterizzazione della differenziabilità). Sia $f : A \to \mathbb{R}^m$ una funzione con $A \subset \mathbb{R}^n$ insieme aperto e $x_0 \in A$. Sono equivalenti le seguenti affermazioni:

A) La funzione f è differenziabile in x_0.

B) Esistono una trasformazione lineare $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ ed una funzione $E_{x_0} : A \to \mathbb{R}^m$ tali che $f(x) = f(x_0) + T(x - x_0) + E_{x_0}(x)$ per $x \in A$ e

$$E_{x_0}(x) = o(|x - x_0|), \quad x \to x_0.$$

Dim. A)$\Rightarrow$B). Scegliamo $T = df(x_0)$ e definiamo $E_{x_0}(x) = f(x) - f(x_0) - T(x - x_0)$. La funzione E_{x_0} verifica la proprietà richiesta

$$\lim_{x \to x_0} \frac{E_{x_0}(x)}{|x - x_0|} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - T(x - x_0)}{|x - x_0|} = 0,$$

in quanto f è differenziabile.

B)⇒A) Proviamo che $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, R^m)$ data in B) è il differenziale di f:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - T(x - x_0)}{|x - x_0|} = \lim_{x\to x_0} \frac{E_{x_0}(x)}{|x - x_0|} = 0.$$

□

Teorema 4.5. Sia $f : A \to \mathbb{R}^m$ una funzione differenziabile nel punto $x_0 \in A$ con $A \subset \mathbb{R}^n$ insieme aperto. Allora:

i) f è continua in x_0.

ii) f ha in x_0 derivata direzionale in ogni direzione $v \in \mathbb{R}^n$ e inoltre

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x_0) = df(x_0)(v). \tag{4.11}$$

In particolare, la differenziabilità implica la derivabilità.

Dim. i) Usiamo la caratterizzazione B) della differenziabilità nel teorema precedente, la continuità di T e le proprietà di E_{x_0}:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} \big(f(x_0) + T(x - x_0) + E_{x_0}(x)\big) = f(x_0).$$

ii) Usiamo di nuovo la caratterizzazione B):

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial v}(x_0) &= \lim_{t\to 0} \frac{f(x_0 + tv) - f(x_0)}{t} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{df(x_0)(tv) + E_{x_0}(tv)}{t} \\ &= df(x_0)(v) + \lim_{t\to 0} \frac{E_{x_0}(tv)}{t} = df(x_0)(v).\end{aligned}$$

□

Osservazione 4.6 (Significato geometrico del gradiente). Quando $m = 1$ si ha $df(x_0)(v) = \langle \nabla f(x_0), v\rangle$ e quindi si ottiene la seguente formula di rappresentazione per la derivata direzionale

$$f_v(x_0) = \frac{\partial f}{\partial v}(x_0) = \langle \nabla f(x_0), v\rangle.$$

Se $|v| = 1$ allora $|f_v(x_0)| = |\langle \nabla f(x_0), v\rangle| \leq |\nabla f(x_0)|$. Deduciamo che

$$\max_{|v|=1} f_v(x_0) = |\nabla f(x_0)|$$

e il massimo è raggiunto con la scelta $v = \nabla f(x)/|\nabla f(x)|$.

Osservazione 4.7 (Test della differenziabilità). Quando $m = 1$, la formula (4.9) che definisce la differenziabilità si può riscrivere nel seguente modo

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - \langle \nabla f(x_0), x - x_0\rangle}{|x - x_0|} = 0. \tag{4.12}$$

Dunque, per controllare la differenziabilità di f in x_0 si controlla prima l'esistenza delle derivate parziali in x_0, e poi si verifica che il limite in (4.12) sia zero.

Osservazione 4.8 (Identificazione di $df(x_0)$ e $Jf(x_0)$). Sia ora f a valori in $\mathbb{R}^m$ con $m \geq 1$ e sia $(T_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}$ la matrice associata al differenziale $T = df(x_0)$. Allora avremo

$$T_{ij} = \langle T\mathrm{e}_j, \mathrm{e}_i \rangle = \langle df(x_0)(\mathrm{e}_j), \mathrm{e}_i \rangle = \langle f_{x_j}(x_0), \mathrm{e}_i \rangle = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_0).$$

Dunque, possiamo identificare $df(x_0)$ con la matrice Jacobiana $Jf(x_0)$

$$df(x_0) = Jf(x_0).$$

Questa identificazione dipende dalla scelta delle basi canoniche.

Esercizio 42. Calcolare tutti gli $m, n \in \mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$ tali che la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ così definita

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^m y^n}{x^2 + y^2} & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0 & x^2 + y^2 = 0 \end{cases} \tag{4.13}$$

1) abbia tutte le derivate direzionali in $0 \in \mathbb{R}^2$;
2) sia differenziabile in $0 \in \mathbb{R}^2$.

Soluzione. 1) Sia $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ una direzione $v \neq 0$. Allora

$$f(tv) - f(0) = t^{m+n-2} \frac{v_1^m v_2^n}{v_1^2 + v_2^2},$$

e dunque

$$\frac{\partial f}{\partial v}(0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(tv) - f(0)}{t} = \lim_{t \to 0} t^{m+n-3} \frac{v_1^m v_2^n}{v_1^2 + v_2^2} = \begin{cases} 0, & \text{se } m + n > 3 \\ \dfrac{v_1^m v_2^n}{v_1^2 + v_2^2}, & \text{se } m + n = 3. \end{cases}$$

Dunque, esistono tutte le derivate direzionali se e solo se $m + n \geq 3$.

2) Quando $m + n = 3$, l'applicazione $v \mapsto f_v(0)$ non è lineare e dunque f non può essere differenziabile in 0. Nel caso $m + n > 3$ si ha

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0) = 0,$$

e dunque dobbiamo studiare il limite per $(x,y) \to 0 \in \mathbb{R}^2$ del quoziente

$$\frac{f(x,y) - f(0) - \langle \nabla f(0), (x,y) \rangle}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{x^m y^n}{(x^2 + y^2)^{3/2}} = (*).$$

Con le coordinate polari $x = r \cos \vartheta$ e $y = r \sin \vartheta$ si trova

$$|(*)| = r^{m+n-3} |\cos \vartheta|^m |\sin \vartheta|^n \leq r^{m+n-3},$$

con maggiorazione *indipendente da* ϑ. Questo prova che

$$\lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{f(x,y) - f(0) - \langle \nabla f(0), (x,y) \rangle}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0,$$

e con ciò la differenziabilità di f in 0 quando $m + n > 3$.

Definizione 4.9 (Piano tangente ad un grafico). Sia $f : A \to \mathbb{R}$ differenziabile in un punto $x_0 \in A$. Sappiamo allora che si ha lo sviluppo

$$f(x) = f(x_0) + \langle \nabla f(x_0), x - x_0 \rangle + E_{x_0}(x),$$

dove $E_{x_0}(x) = o(|x - x_0|)$ per $x \to x_0$. Consideriamo la parte lineare dello sviluppo

$$\varphi(x) = f(x_0) + \langle \nabla f(x_0), x - x_0 \rangle, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

La funzione $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ è affine, verifica $\varphi(x_0) = f(x_0)$ e $|f(x) - \varphi(x)| = o(|x - x_0|)$ per $x \to x_0$. Il suo grafico

$$\mathrm{gr}(\varphi) = \big\{(x, \varphi(x)) \in \mathbb{R}^{n+1} : x \in \mathbb{R}^n\big\}$$

è un piano affine n-dimensionale che si dice *piano tangente (affine) al grafico di f* nel punto $(x_0, f(x_0)) \in \mathrm{gr}(f)$.

Esempio 4.10. Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ la funzione $f(x) = \sqrt{1 + |x|^2}$ e consideriamo la superficie n-dimensionale

$$M = \mathrm{gr}(f) = \big\{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^{n+1} : x \in \mathbb{R}^n\big\}.$$

M è la falda superiore di un iperboloide di rotazione n-dimensionale. Calcoliamo il piano tangente ad M nel punto $(x_0, f(x_0)) \in \mathrm{gr}(f)$. Il gradiente di f in x_0 è

$$\nabla f(x_0) = \frac{x_0}{\sqrt{1 + |x_0|^2}}.$$

Il piano tangente (affine) è il grafico della funzione

$$\varphi(x) = f(x_0) + \langle \nabla f(x_0), x - x_0 \rangle = \sqrt{1 + |x_0|^2} + \frac{\langle x_0, x - x_0 \rangle}{\sqrt{1 + |x_0|^2}} = \frac{1 + \langle x_0, x \rangle}{\sqrt{1 + |x_0|^2}},$$

e precisamente

$$\mathrm{gr}(\varphi) = \Big\{(x, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : x_{n+1} = \frac{1 + \langle x_0, x \rangle}{\sqrt{1 + |x_0|^2}}\Big\}.$$

5. Differenziale della funzione composta

In questa sezione proviamo la formula per il differenziale della funzione composta. Nel caso di somma e prodotto di funzioni si hanno i seguenti fatti.

1. Differenziale della somma. Se $f, g : A \to \mathbb{R}^m$, $A \subset \mathbb{R}^n$ aperto, sono differenziabili in un punto $x_0 \in A$ allora anche la funzione somma $f + g$ è differenziabile in x_0 e inoltre

$$d(f + g)(x_0) = df(x_0) + dg(x_0).$$

La verifica è elementare.

2. Differenziale del prodotto. Siano $f, g : A \to \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}^n$ aperto, funzioni differenziabili in un punto $x_0 \in A$. Allora anche la funzione prodotto $f \cdot g$ è differenziabile in x_0 e inoltre

$$d(f \cdot g)(x_0) = f(x_0) dg(x_0) + g(x_0) df(x_0).$$

La verifica è elementare e si ottiene moltiplicando gli sviluppi

$$f(x) = f(x_0) + df(x_0)(x - x_0) + F_{x_0}(x)$$
$$g(x) = g(x_0) + dg(x_0)(x - x_0) + G_{x_0}(x),$$

con $F_{x_0}(x) = o(|x - x_0|)$ e $G_{x_0}(x) = o(|x - x_0|)$ per $x \to x_0$.

TEOREMA 5.1 (Differenziale della funzione composta). Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ un insieme aperto e sia $f : A \to \mathbb{R}^m$ una funzione differenziabile nel punto $x_0 \in A$. Sia poi $B \subset \mathbb{R}^m$ un insieme aperto tale che $f(A) \subset B$ e sia $g : B \to \mathbb{R}^k$ una funzione differenziabile nel punto $f(x_0) \in B$. Allora la funzione composta $g \circ f : A \to \mathbb{R}^k$ è differenziabile nel punto x_0 e inoltre

$$d(g \circ f)(x_0) = dg(f(x_0)) \circ df(x_0). \tag{5.14}$$

Equivalentemente, le matrici Jacobiane verificano

$$\underbrace{J_{g\circ f}(x_0)}_{k\times n} = \underbrace{J_g(f(x_0))}_{k\times m}\underbrace{J_f(x_0)}_{m\times n}, \tag{5.15}$$

con la notazione di prodotto fra matrici righe$\times$colonne.

Dim. Per il Teorema 4.4, avremo

$$f(x) = f(x_0) + T(x - x_0) + F_{x_0}(x), \quad x \in A,$$

con $T = df(x_0) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ ed $F_{x_0} : A \to \mathbb{R}^m$ tale che $F_{x_0}(x) = o(|x - x_0|)$ per $x \to x_0$. Inoltre, posto $y_0 = f(x_0)$, avremo

$$g(y) = g(y_0) + S(y - y_0) + G_{y_0}(y), \quad y \in B,$$

con $S = dg(y_0) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^k)$ ed $G_{y_0} : B \to \mathbb{R}^k$ tale che $G_{y_0}(y) = o(|y - y_0|)$ per $y \to y_0$.

Componendo f con g si trova

$$\begin{aligned} g(f(x)) &= g(f(x_0)) + S(f(x) - f(x_0)) + G_{f(x_0)}(f(x)) \\ &= g(f(x_0)) + S(T(x - x_0) + F_{x_0}(x)) + G_{f(x_0)}(f(x)) \\ &= g(f(x_0)) + S(T(x - x_0)) + S(F_{x_0}(x)) + G_{f(x_0)}(f(x)). \end{aligned}$$

Abbiamo usato la linearità di S.

Chiaramente si ha $S \circ T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^k)$. Consideriamo la funzione $H_{x_0} : A \to \mathbb{R}^k$

$$H_{x_0}(x) = S(F_{x_0}(x)) + G_{f(x_0)}(f(x)).$$

Da un lato avremo, per $x \to x_0$,

$$S(F_{x_0}(x)) = o(|x - x_0|),$$

e dall'altro, siccome $x \to x_0$ implica $f(x) \to f(x_0)$ (la differenziabilità implica la continuità), per $f(x) \neq f(x_0)$ avremo

$$\frac{G_{f(x_0)}(f(x))}{|x - x_0|} = \frac{|T(x - x_0) + E_{x_0}(x)|}{|x - x_0|} \frac{G_{f(x_0)}(f(x))}{|f(x) - f(x_0)|} = o(|x - x_0|), \quad x \to x_0.$$

Quando $f(x) = f(x_0)$, è semplicemente $G_{f(x_0)}(f(x)) = 0$.

In conclusione, $H_{x_0}(x) = o(|x - x_0|)$ per $x \to x_0$. Per il Teorema 4.4, $g \circ f$ è differenziabile in x_0 con differenziale $d(g \circ f)(x_0) = S \circ T = dg(f(x_0)) \circ df(x_0)$.

Esempio 5.2 (Derivata di una funzione lungo una curva). Sia $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ una curva derivabile (equivalentemente, differenziabile) in tutti i punti. Coerentemente con la convenzione fissata in (2.8), pensiamo γ come un vettore colonna

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} \gamma_1(t) \\ \vdots \\ \gamma_n(t) \end{pmatrix}, \quad t \in [0,1].$$

Sia poi $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una funzione differenziabile (in tutti i punti lungo la curva). Allora avremo

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} f(\gamma(t)) &= J_{f\circ\gamma}(t) = J_f(\gamma(t))J_\gamma(t) = \Big(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\gamma(t)) \cdots \frac{\partial f}{\partial x_n}(\gamma(t))\Big) \begin{pmatrix} \dot\gamma_1(t) \\ \vdots \\ \dot\gamma_n(t) \end{pmatrix} \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(\gamma(t))\dot\gamma_i(t).\end{aligned}$$

Con una notazione più compatta possiamo anche scrivere

$$\frac{d}{dt} f(\gamma(t)) = \langle \nabla f(\gamma(t)), \dot\gamma(t)\rangle, \quad t \in [0,1]. \tag{5.16}$$

Esempio 5.3. Esplicitiamo la formula (5.15) del Teorema 5.1. Siano $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ e $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ due funzioni differenziabili. La composizione $G = g \circ f$ ha k componenti $G = (G_1, \dots, G_k)$, da pensare come vettore colonna. La formula (5.15), ovvero $JG(x) = Jg(f(x))\, Jf(x)$, si legge nel seguente modo:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial G_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial G_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial G_k}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial G_k}{\partial x_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial y_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_k}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial g_k}{\partial y_m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix},$$

dove le derivate parziali di g vanno calcolate nel punto $f(x)$, quelle di f e G nel punto x. Alla riga $i \in \{1, \dots, k\}$ e colonna $j \in \{1, \dots, n\}$ della matrice $JG(x)$ si trova l'entrata

$$\frac{\partial G_i}{\partial x_j}(x) = \sum_{\ell=1}^m \frac{\partial g_i}{\partial y_\ell}(f(x)) \frac{\partial f_\ell}{\partial x_j}(x).$$

6. Teoremi del valor medio

In questa sezione estendiamo il Teorema di Lagrange al caso multidimensionale.

Teorema 6.1. Sia $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione differenziabile nell'aperto $A \subset \mathbb{R}^n$, e siano $x, y \in A$ punti tali che $[x,y] := \big\{tx + (1-t)y \in \mathbb{R}^n : t \in [0,1]\big\} \subset A$. Allora esiste un punto $z \in [x,y]$ tale che

$$f(x) - f(y) = \langle \nabla f(z), x - y\rangle. \tag{6.17}$$

Dim. Sia $\gamma : [0,1] \to A$, $\gamma(t) = tx + (1-t)y$ una parametrizzazione del segmento, e definiamo la funzione composta $\varphi = f \circ \gamma$, ovvero

$$\varphi(t) = f(tx + (1-t)y) = f(\gamma(t)), \quad t \in [0,1].$$

Per il Teorema 5.1, φ è differenziabile su $[0,1]$, e quindi per il Teorema di Lagrange esiste un punto $t^* \in [0,1]$ tale che $\varphi(1) - \varphi(0) = \varphi'(t^*)$. Per la formula (5.16),

$$\varphi'(t) = \langle \nabla f(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle, \quad t \in [0,1].$$

e dunque, posto $z = \gamma(t^*)$, si ottiene la tesi. □

Nel caso di funzioni a valori vettoriali la formulazione del Teorema del valor medio deve essere precisata.

Teorema 6.2. Sia $f : A \to \mathbb{R}^m$ una funzione differenziabile nell'aperto $A \subset \mathbb{R}^n$, e siano $x, y \in A$ punti tali che $[x,y] := \big\{tx + (1-t)y \in \mathbb{R}^n : t \in [0,1]\big\} \subset A$. Allora per ogni $v \in \mathbb{R}^m$ esiste un punto $z \in [x,y]$ tale che

$$\langle f(x) - f(y), v \rangle = \langle df(z)(x-y), v \rangle. \tag{6.18}$$

Dim. Sia $\gamma : [0,1] \to A$, $\gamma(t) = tx + (1-t)y$ una parametrizzazione del segmento, e definiamo la funzione composta $\varphi = \langle f \circ \gamma, v \rangle$ ovvero

$$\varphi(t) = \sum_{i=1}^m f_i(tx + (1-t)y), v_i \rangle, \quad t \in [0,1].$$

Per la linearità del prodotto scalare possiamo portare la derivata in t dentro il prodotto scalare, e dunque, per il Teorema 5.1,

$$\varphi'(t) = \sum_{i=1}^m \frac{d}{dt} f_i(\gamma(t)) v_i = \sum_{i=1}^m \langle \nabla f_i(\gamma(t)), x-y \rangle v_i = \langle df(\gamma(t))(x-y), v \rangle.$$

Abbiamo omesso i conti che provano l'ultima identità.

Per il Teorema 5.1, φ è differenziabile su $[0,1]$, e quindi per il Teorema di Lagrange esiste un punto $t^* \in [0,1]$ tale che $\varphi(1) - \varphi(0) = \varphi'(t^*)$. Dunque, posto $z = \gamma(t^*)$, si ottiene la tesi.

□

Corollario 6.3. Sia $f : A \to \mathbb{R}^m$ una funzione differenziabile nell'aperto $A \subset \mathbb{R}^n$, e siano $x, y \in A$ punti tali che $[x,y] := \big\{tx + (1-t)y \in \mathbb{R}^n : t \in [0,1]\big\} \subset A$. Allora esiste un punto $z \in [x,y]$ tale che

$$|f(x) - f(y)| \leq \|df(z)\| |x-y|, \tag{6.19}$$

dove $\|df(z)\|$ è la norma di $df(z) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$.

Dim. Per ogni $v \in \mathbb{R}^m$ esiste $z \in [x,y]$ che rende vera l'identità (6.18). Scegliamo $v = f(x) - f(y)$ e, usando la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz e la (4.6), otteniamo

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)|^2 &= \langle df(z)(x-y), f(x) - f(y) \rangle \\ &\leq |df(z)(x-y)| |f(x) - f(y)| \\ &\leq \|df(z)\| |x-y| |f(x) - f(y)|. \end{aligned}$$

Se $|f(x) - f(y)| = 0$ la tesi è banalmente verificata. Possiamo dunque dividere per $|f(x) - f(y)| \neq 0$ e ottenere la tesi. □

Corollario 6.4. Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ un aperto convesso e sia $f : A \to \mathbb{R}^m$ una funzione differenziabile in A tale che $\|df(x)\| \leq L < \infty$ per ogni $x \in A$. Allora f è Lipschitziana e $\mathrm{Lip}(f) \leq L$.

La prova segue immediatamente dal corollario precedente.

7. Funzioni di classe C^1

Siano $A \subset \mathbb{R}^n$ un aperto ed $f : A \to \mathbb{R}^m$, $m \geq 1$, una funzione con coordinate $f = (f_1, \dots, f_m)$.

Definizione 7.1. Definiamo $C^1(A; \mathbb{R}^m)$ come l'insieme di tutte le funzioni $f : A \to \mathbb{R}^m$ tali che esistono e sono continue in A tutte le derivate parziali

$$\frac{\partial f_j}{\partial x_i} \in C(A), \quad i = 1, \dots, n, \ j = 1, \dots, m.$$

Scriveremo anche $C^1(A) = C^1(A; \mathbb{R})$.

Teorema 7.2. Se $f \in C^1(A; \mathbb{R}^m)$ allora f è differenziabile in ogni punto $x_0 \in A$.

Dim. È sufficiente provare il teorema nel caso $m = 1$. Fissato $x_0 \in A$ consideriamo la trasformazione lineare $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R})$

$$Th = \langle \nabla f(x_0), h \rangle = \sum_{j=1}^n h_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0).$$

Dobbiamo provare che

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - Th}{|h|} = 0. \tag{7.20}$$

Partiamo dalla seguente espansione telescopica:

$$\begin{aligned} f(x_0 + h) - f(x_0) &= f\Big(x_0 + \sum_{i=1}^n h_i \mathrm{e}_i\Big) - f(x_0) \\ &= \sum_{j=1}^n f\Big(x_0 + \sum_{i=1}^j h_i \mathrm{e}_i\Big) - f\Big(x_0 + \sum_{i=1}^{j-1} h_i \mathrm{e}_i\Big). \end{aligned}$$

Dal Teorema del valor medio segue che per ogni $j = 1, \dots, n$ esiste $h_j^* \in \mathbb{R}$ tale che $|h_j^*| \leq |h_j| \leq |h|$ e si ha

$$f\Big(x_0 + \sum_{i=1}^j h_i \mathrm{e}_i\Big) - f\Big(x_0 + \sum_{i=1}^{j-1} h_i \mathrm{e}_i\Big) = h_j \frac{\partial f}{\partial x_j}\Big(x_0 + \sum_{i=1}^{j-1} h_i \mathrm{e}_i + h_j^* \mathrm{e}_j\Big).$$

Deduciamo che

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - Th}{|h|} = \sum_{j=1}^n \frac{h_j}{|h|} \Big[\frac{\partial f}{\partial x_j}\Big(x_0 + \sum_{i=1}^{j-1} h_i \mathrm{e}_i + h_j^* \mathrm{e}_j\Big) - \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0)\Big],$$

dove le quantità $h_j/|h|$ rimangono limitate, mentre per la continuità delle derivate parziali si ha per ogni $j = 1, \dots, n$:

$$\lim_{h\to 0} \Big[\frac{\partial f}{\partial x_j}\Big(x_0 + \sum_{i=1}^{j-1} h_i \mathrm{e}_i + h_j^* \mathrm{e}_j\Big) - \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0)\Big] = 0,$$

e la tesi (7.20) segue. □

Osservazione 7.3. Riassumiamo la situazione:

$$f \in C^1(A) \quad \Rightarrow \quad f \text{ differenziabile in } A \quad \Rightarrow \quad f \text{ derivabile e continua in } A.$$

Tuttavia, f può essere differenziabile in ogni punto di A senza che sia $f \in C^1(A)$. Questo fatto è già vero in dimensione $n = 1$.