ESERCIZIO. Verificare che la soluzione del Problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = -(x+1)y^2 + x \\ y(-1) = 1 \end{cases}$$

è definita su tutto $\mathbb{R}$.

Soluzione La funzione $f(x,y) = -(x+1)y^2 + x$ è in $C^\infty(\mathbb{R}^2)$ e quindi c'è esistenza e unicità locale.
Il criterio di esistenza globale, tuttavia, non si applica in quanto f cresce in modo quadratico in y.

Studiamo $f(x,y) > 0$ ovvero

$$-(x+1)y^2 + x > 0 \iff (x+1)y^2 < x$$

Se $x+1 > 0$ si ottiene

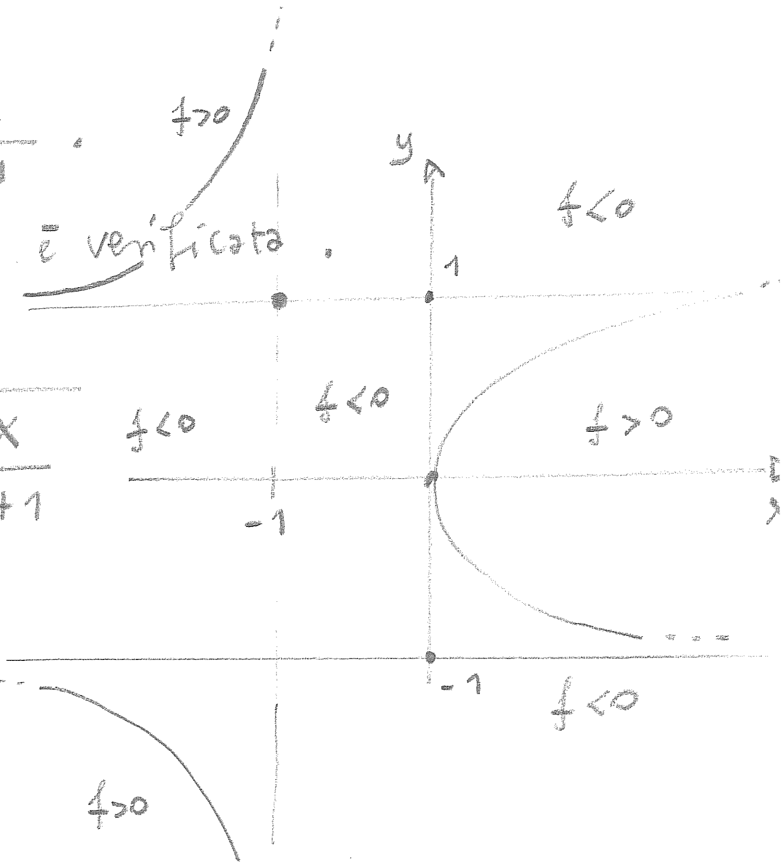
$$y^2 < \frac{x}{x+1}.$$

Se $-1 < x \leq 0$ la diseq. non è verificata.
Se $x > 0$ si trova

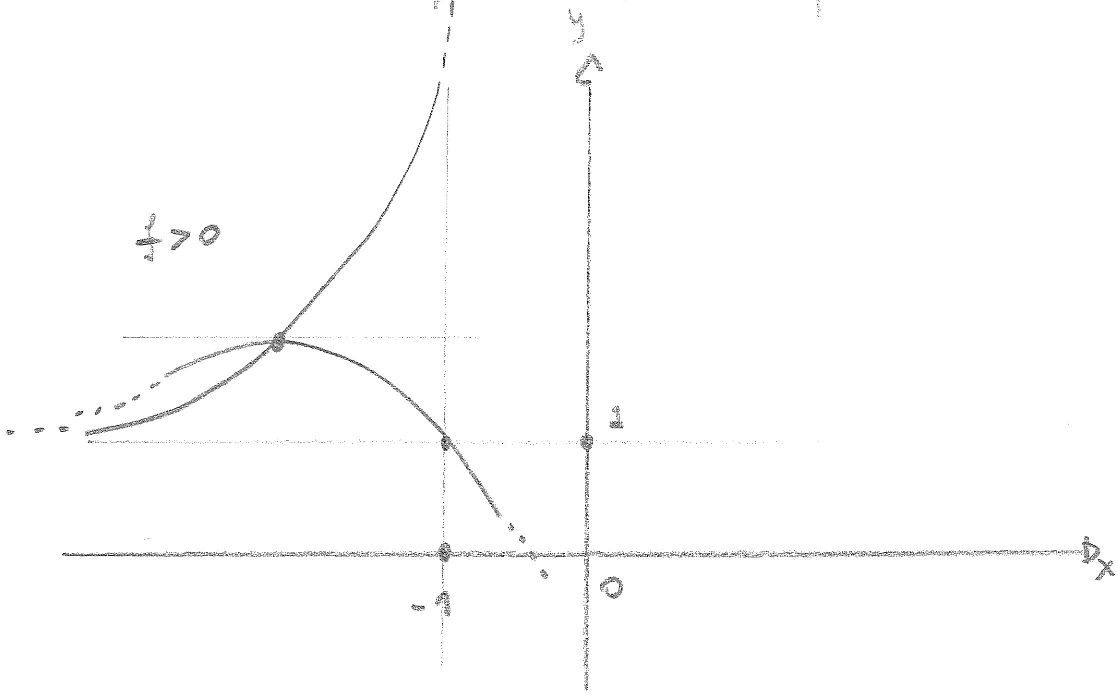
$$|y| < \sqrt{\frac{x}{x+1}}$$

Se $x+1 < 0$ si trova

$$y^2 > \frac{x}{x+1}$$

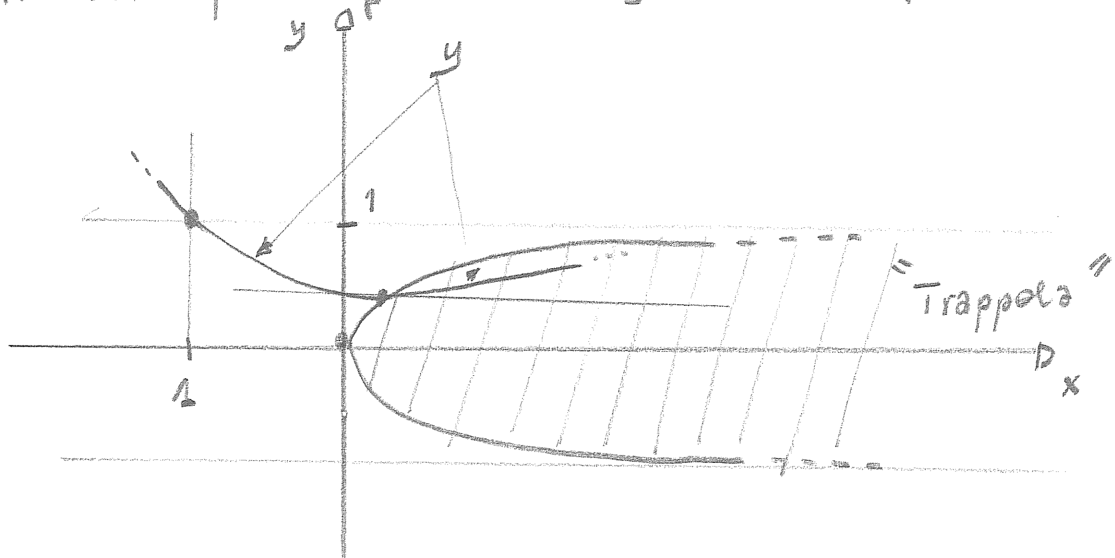


La soluzione y decresce intorno $x = -1$.
Inoltre entra nella regione $\{f>0\}$ per $x<-1$:



Dalla regione $\{f>0\} \cap \{x<-1 \text{ e } y>0\}$ la soluzione y non può uscire ed è ivi crescente. Quindi rimane limitata e per il primo criterio di prolungamento y è definita su $(-\infty,-1]$.

Se y raggiunge la regione $\{f>0\} \cap \{x \geq 0\}$ rimane "intrappolata" in questa regione. Per il criterio di prolungamento y sarà definita su $[-1,\infty)$:



Stimiamo y dal basso. Se $-1 \leq x \leq 0$:

$$y'(x) = -(x+1)y^2 + x \geq -(0+1)y^2 - 1$$

ovvero $\quad y'(x) \geq -(1+y^2)$. Integrando su $[-1, x]$:

$$\int_{-1}^{x} \frac{y'}{1+y^2}\, dt \geq -\int_{-1}^{x} dt = -(x+1)$$

e quindi

$$\operatorname{arctg}(y(x)) - \operatorname{arctg}(y(-1)) \geq -(x+1)$$

ovvero

$$\operatorname{arctg}(y(x)) \geq \frac{\pi}{4} - (x+1)$$

e per $x = 0$: $\operatorname{arctg}(y(0)) \geq \frac{\pi}{4} - 1$.

La stima

$$y(0) \geq \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - 1\right)$$

non basta per concludere, perché $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - 1\right) < 0$.

Tuttavia abbiamo scoperto che su $[-1, 0]$ si ha $|y(x)| \leq 1$. Quindi:

$$y'(x) = -(x+1)y^2 + x \geq -(x+1) + x = -1$$

e integrando

$$y(0) - y(-1) = \int_{-1}^{0} y'(x)\, dx \geq \int_{-1}^{0} -1\, dx = -1$$

da cui si deduce che $y(0) \geq 0$ e si conclude. $\square$