<u>ESERCIZIO</u> Sia $D \subset \mathbb{R}^2$ il dominio di definizione della funzione

$$f(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} \log(1+x^{2n}+y^{2n}) .$$

i) Determinare D.
ii) Provare che $f \in C(D)$.
iii) Provare che $f \in C^1(D)$.

i) Dobbiamo determinare tutti gli $x, y \in \mathbb{R}$ tali che la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \log(1+x^{2n}+y^{2n})$$

converga. Se $|x| \geq 1$ oppure $|y| \geq 1$ allora

$$\log(1+x^{2n}+y^{2n}) \geq \log 2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

e quindi la serie non converge.

Proviamo che per $|x|<1$ e $|y|<1$ la serie converge.

Usando

$$\log(1+t) \leq t \qquad \forall t > -1$$

si trova

$$\sum_{n=0}^{\infty} \log(1+x^{2n}+y^{2n}) \leq \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n}+y^{2n} = \frac{1}{1-x^2} + \frac{1}{1-y^2}$$

e per confronto la serie converge. Di più, per $0<\delta<1$ si ha

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sup_{\substack{|x|\le\delta \\ |y|\le\delta}} \log(1+x^{2n}+y^{2n}) \le 2\sum_{n=0}^{\infty} \delta^{2n} = \frac{2}{1-\delta^2} < \infty .$$

Per il Criterio di Weierstrass la serie converge uniformemente sui quadrati $[-\delta,\delta]\times[-\delta,\delta]$, per ogni $0<\delta<1$.

ii) Poiché le funzioni $(x,y)\mapsto \log(1+x^{2n}+y^{2n})$ sono continue e la serie converge uniformemente sui compatti di D, segue che f è continua su D.

iii) Calcoliamo in modo formale la derivata parziale

$$f_x(x,y) = \frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\sum_{n=0}^{\infty} \log(1+x^{2n}+y^{2n})$$

$$(*) \overset{(?)}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial}{\partial x} \log(1+x^{2n}+y^{2n})$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n\,x^{2n-1}}{1+x^{2n}+y^{2n}} = (**)$$

Se l'ultima serie converge uniformemente per $|x|\le\delta<1$ allora si può scambiare $\sum$ con $\frac{\partial}{\partial x}$ in $(*)$ e dunque esiste f_x su D.

Osserviamo che

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n\,x^{2n-1}}{1+x^{2n}+y^{2n}} \le 2\sum_{n=0}^{\infty} n\,x^{2n-1}$$

La serie di potenze $\sum_{n=0}^{\infty} n\, x^{2n-1}$ ha raggio di convergenza $R=1$ e quindi converge uniformemente per $|x| \leq \delta < 1$.

Conclusione per confronto: la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n\, x^{2n-1}}{1+x^{2n}+y^{2n}}$$ converge uniformemente per $|x| \leq \delta < 1$ (e per $|y|<1$).

Dunque il passaggio (?) è lecito.
Inoltre la serie (**) definisce una funzione continua in quanto converge uniformemente.
Di conseguenza:

$$f_x \in C(D).$$

In modo identico si prova che $f_y \in C(D)$.
Quindi $f \in C^1(D)$.

$\square$