ESERCIZIO Si consideri il Problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \log y - x \\ y(1) = e \end{cases},$$

i) Provare che esiste un'unica soluzione locale $y \in C^1(-\delta, \delta)$ per qualche $\delta > 0$.

ii) Studiare la monotonia della soluzione.

iii) Sia $(a,b) \subset \mathbb{R}$ con $-\infty \leq a < b \leq \infty$ l'intervallo di definizione della soluzione massimale.
Provare che $a = -\infty$ e che $b < \infty$

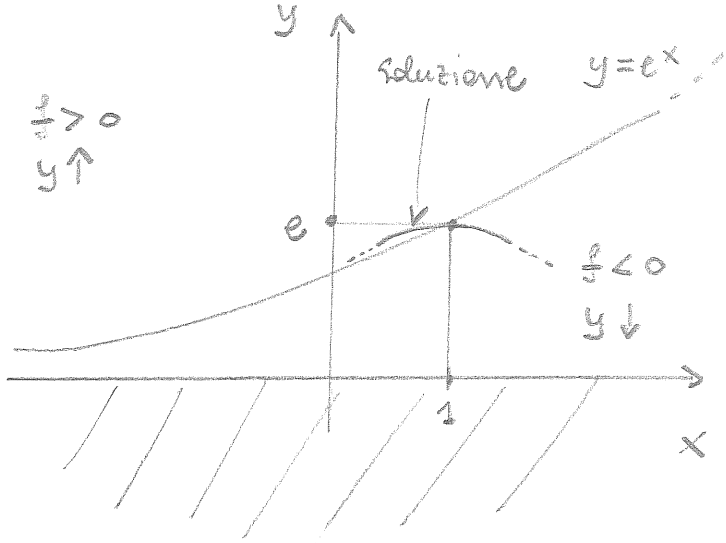
iv) Studiare la convessità della soluzione.

i) Sia $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 ;\ y > 0\}$. La funzione $f : A \to \mathbb{R}$,
$$f(x,y) = \log y - x$$
è di classe $C^\infty(A)$, dunque è localmente di Lipschitz in A. Per il Teorema di esistenza e unicità locale esiste, unica, la soluzione del problema. Deve essere $y(x) > 0 \quad \forall x \in \text{Dominio}$.

ii) Studiamo la disequazione

$$f(x,y) > 0 \iff \log y > x \iff y > e^x$$

Dunque y cresce dove $y > e^x$, y decresce dove $y < e^x$.

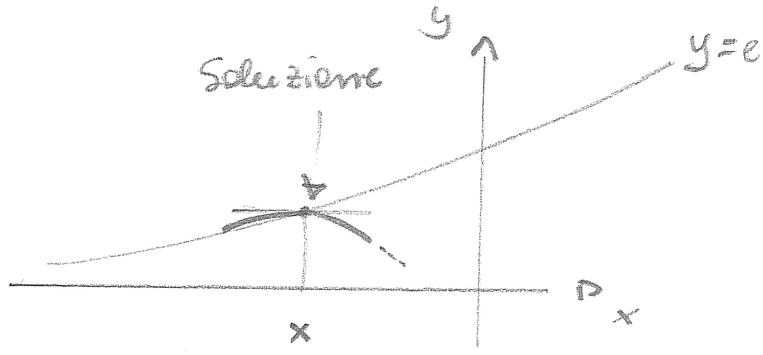


Il dato iniziale è sulla curva $y = e^x$, dove $f = 0$ (ovvero $y' = 0$).

Dunque la soluzione decresce per $x > 1$ mentre cresce per $x < 1$.

iii) Affermo che $y(x) > e^x \quad \forall x < 1$.

Se per assurdo esistesse $\bar{x} < 1$ tale che $y(\bar{x}) = e^{\bar{x}}$ allora si avrebbe $y'(\bar{x}) = 0$ e la situazione sarebbe:



Avremmo $y(x) < e^x \quad \forall x > \bar{x}$. Questo non è possibile.

Conclusione

$$e^x < y(x) < e \qquad \forall x \in (a, 1).$$

Dal criterio di prolungamento deduciamo che $a = -\infty$

Per $x \geq 1$ abbiamo $y(x) \leq e$ e quindi

$$y'(x) = \log y(x) - x \leq 1 - x$$

Integrando su $[1, x]$:

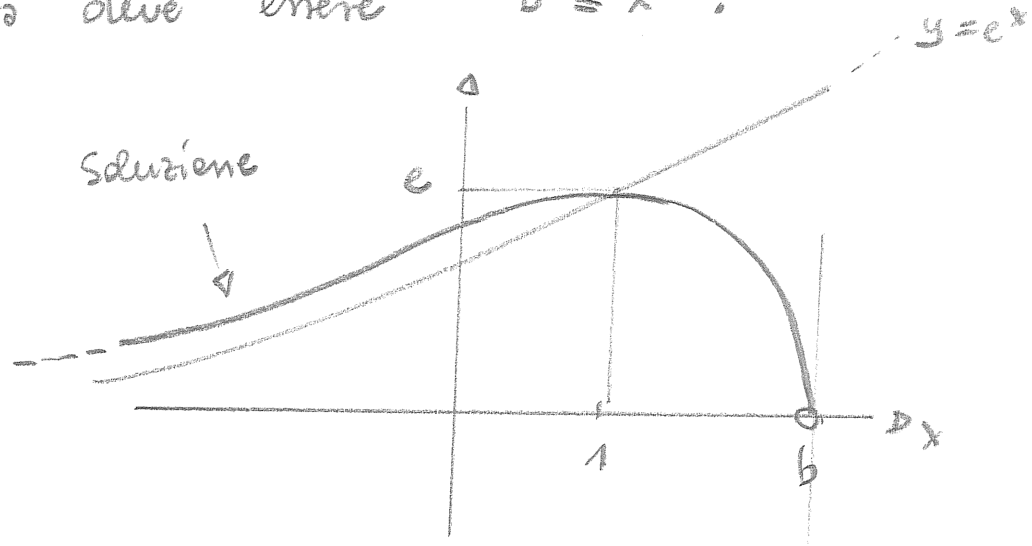
$$\underset{\substack{\| \\ e}}{y(x) - y(1)} = \int_1^x y'(t)\, dt \leq \int_1^x (1-t)\, dt = x - 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}$$

ovvero

$$y(x) \leq e - \frac{1}{2} + x - \frac{x^2}{2} = \varphi(x).$$

Sia $x^* > 1$ il punto tale che $\varphi(x^*) = 0$.

Allora deve essere $b \leq x^*$:



Deve essere $\lim_{x \to b^-} y(x) = 0$, altrimenti y si prolunga oltre b. Dunque: $\lim_{x \to b^-} y'(x) = -\infty$.

iv) Convessità: omesso.