Esercizio Calcolare tutti gli $\alpha \in \mathbb{R}$ tali che la soluzione del Problema di Cauchy

$$(*) \quad \begin{cases} y' = y^2 - 2y + \alpha \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

sia definita su tutto $\mathbb{R}$.

Soluzione. L'equazione differenziale è a variabili separabili e si integra esplicitamente.

Alternativamente, ragioniamo nel seguente modo. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ il polinomio $f(y) = y^2 - 2y + \alpha$. Se il discriminante $\Delta = 4 - 4\alpha$ verifica $\Delta \geq 0$, ovvero $\alpha \leq 1$, allora f ha le radici reali

$$y_\pm = 1 \pm \sqrt{1-\alpha} \, .$$

Se $\alpha = 1$ la radice è doppia. Dunque le funzioni costanti

$$y_+(x) = 1 + \sqrt{1-\alpha}$$
$$y_-(x) = 1 - \sqrt{1-\alpha}$$

sono soluzioni dell'equazione differenziale $y' = y^2 - 2y + \alpha$. In particolare, per $\alpha = 1$ la funzione $y(x) = 1$ è la soluzione (unica) di $(*)$, ed è globale.

Quando $\alpha < 1$, la soluzione y di (*) deve verificare
$$1-\sqrt{1-\alpha} = y_- < y(x) < y_+ = 1+\sqrt{1-\alpha} \qquad \forall x .$$

Questo segue da un argomento standard di unicità.
Rimanendo limitata, la soluzione è definita $\forall x \in \mathbb{R}$.

Consideriamo infine il caso $\alpha > 1$. Separiamo le variabili e integriamo:
$$\int_0^x \frac{y'(t)\,dt}{y(t)^2 - 2y(t) + \alpha} = x$$

ovvero
$$x = \int_1^{y(x)} \frac{dz}{z^2 - 2z + \alpha} = \int_1^{y(x)} \frac{dz}{(z-1)^2 + \alpha - 1}$$

$$= \frac{1}{\alpha-1} \int_1^{y(x)} \frac{dz}{\left(\frac{z-1}{\sqrt{\alpha-1}}\right)^2 + 1}$$

$$= \frac{1}{\alpha-1} \left[\sqrt{\alpha-1}\ \operatorname{arctg}\left(\frac{z-1}{\sqrt{\alpha-1}}\right)\right]_{z=1}^{z=y(x)}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\alpha-1}} \operatorname{arctg}\left(\frac{y(x)-1}{\sqrt{\alpha-1}}\right).$$

La soluzione è
$$y(x) = 1 + \sqrt{\alpha-1}\ \operatorname{tg}\left(\sqrt{\alpha-1}\ x\right)$$

e <u>non</u> è globale su $\mathbb{R}$. □

ESERCIZIO. Si consideri la curva $\gamma : [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}$

$$\gamma(t) = \begin{cases} \dfrac{2t^\alpha}{1+t} \, e^{\frac{i\pi}{2t}} & t \in (0,1] \\ 0 & t = 0 \end{cases}$$

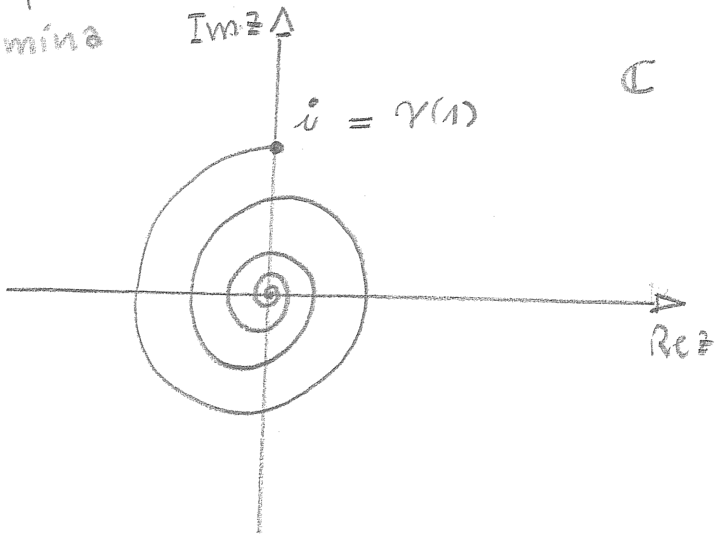
dove $\alpha > 0$ è un parametro.

(1) Per $\alpha = 1$, disegnare il sostegno della curva.

(2) Calcolare tutti gli $\alpha > 0$ tali che γ sia rettificabile.

SOLUZIONE. (1) La funzione $\phi(t) = \dfrac{2t}{1+t}$ è crescente per $t \geq 0$.
Si ha $\gamma(1) = e^{i\frac{\pi}{2}} = i$.

Dunque il sostegno di γ è una spirale che si sviluppa da $0 \in \mathbb{C}$ e termina in $\gamma(1) = i$:



(2) La lunghezza di γ è

$$L(\gamma) = \int_0^1 |\dot{\gamma}(t)| \, dt .$$

Derivata:

$$\dot{\gamma}(t) = 2 \frac{\alpha t^{\alpha-1}(1+t) - t^\alpha}{(1+t)^2} e^{\frac{i\pi}{2t}} + 2 \frac{t^\alpha}{1+t} e^{\frac{i\pi}{2t}} \left(- \frac{i\pi}{2t^2} \right)$$

$$\dot{\gamma}(t) = 2\, e^{\frac{i\pi}{2t}} \left(\frac{\alpha\, t^{\alpha-1} + (\alpha-1)\, t^{\alpha}}{(1+t)^2} - \frac{t^{\alpha}\, i\pi}{(1+t)\; 2t^2} \right)$$

La norma è

$$|\dot{\gamma}(t)| = 2 \sqrt{\frac{(\alpha\, t^{\alpha-1} + (\alpha-1)\, t^{\alpha})^2}{(1+t)^4} + \frac{t^{2(\alpha-2)}\, \pi^2}{(1+t)^2\; 4}}$$

$$= 2 \sqrt{t^{2(\alpha-1)} \frac{(\alpha + (\alpha-1)t)^2}{(1+t)^4} + t^{2(\alpha-2)} \frac{\pi^2}{4(1+t)^2}}$$

$$= 2\, t^{\alpha-2} \sqrt{t^2 \frac{(\alpha + (\alpha-1)t)^2}{(1+t)^4} + \frac{\pi^2}{4(1+t)^2}} \; .$$

Per il criterio del confronto asintotico l'integrale

$$\int_0^1 |\dot{\gamma}(t)|\, dt$$

converge se e solo se

$$\int_0^1 \frac{1}{t^{2-\alpha}}\, dt < \infty \iff 2-\alpha < 1$$
$$\iff \alpha > 1 .$$

Dunque γ è rettificabile se e solo se $\alpha > 1$.

$\square$