ESERCIZIO. Calcolare tutti gli $\alpha > 0$ tali che

$$L = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x\,|y|^\alpha}{(x^2+y^4)(x^2+y^2)} = 0.$$

SOLUZIONE. Tentativo con le coordinate polari

$$x = r\cos\theta$$
$$y = r\sin\theta.$$

Si ottiene

$$\left| \frac{r^{1+\alpha}\cos\theta\,|\sin\theta|^\alpha}{r^4(\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta)} \right| = r^{\alpha-3}\,\frac{|\cos\theta|\,|\sin\theta|^\alpha}{\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta}.$$

La stima purtroppo dipende da θ.

Altro tentativo:

$$\left| \frac{x\,|y|^\alpha}{(x^2+y^4)(x^2+y^2)} \right| = \frac{|x|\,|y|^{\alpha-2}}{x^2+y^4} \cdot \frac{y^2}{x^2+y^2}$$

$$\leq \frac{|x|\,|y|^{\alpha-2}}{x^2+y^4}$$

Osserviamo ora che con la sostituzione $z = y^2$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|x|\,|y|^{\alpha-2}}{x^2+y^4} = \lim_{(x,z)\to(0,0)} \frac{|x|\,|z|^{\frac{\alpha-2}{2}}}{x^2+z^2} = (*)$$

Con coordinate polari $x = r\cos\theta$ e $z = r\sin\theta$

si trova

$$(*) = \lim_{r\to 0^+} \frac{r^{1+\frac{\alpha-2}{2}}}{r^2} = \lim_{r\to 0^+} r^{\frac{\alpha-2}{2}-1}$$

$$= 0 \quad \text{se e solo se} \quad \frac{\alpha-2}{2} - 1 > 0 \iff \alpha > 4.$$

Dunque, se $\alpha > 4$ il limite è 0.

Supponiamo $\alpha \leq 4$. Con la scelta $x = y^2$ (e $y > 0$)

si trova

$$\frac{x\,|y|^\alpha}{(x^2+y^4)(x^2+y^2)} = \frac{y^{2+\alpha}}{2y^4 \cdot y^2(1+y^2)} = \frac{y^{\alpha-4}}{2(1+y^2)}$$

e per $\alpha \leq 4$ si ha

$$\lim_{y\to 0^+} \frac{y^{\alpha-4}}{1+y^2} \neq 0.$$

Conclusione: $L = 0 \iff \alpha > 4.$

$\square$

ESERCIZIO. Calcolare il seguente limite

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{1}{1+n\sin\left(\frac{x^2}{n}\right)}\,dx .$$

Soluzione. Studiamo la convergenza uniforme della successione di funzioni

$$f_n(x) = \frac{1}{1+n\sin\left(\frac{x^2}{n}\right)}, \quad x\in[0,1],\ n\in\mathbb{N}.$$

Poiché $\lim_{n\to\infty} n\sin\left(\frac{x^2}{n}\right) = x^2$ si ha il limite puntuale

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \frac{1}{1+x^2}, \quad x\in[0,1]$$

(In effetti $x\in\mathbb{R}$).

Studiamo la convergenza uniforme:

$$\left| f_n(x) - \frac{1}{1+x^2}\right| = \frac{|x^2 - n\sin(x^2/n)|}{(1+n\sin(x^2/n))(1+x^2)}$$

$$\le |x^2 - n\sin(x^2/n)|$$

Consideriamo $\phi_n(x) = x^2 - n\sin(x^2/n)$.

Derivata: $\phi_n'(x) = 2x - 2x\cos(x^2/n)$

$$= 2x(1-\cos(x^2/n)).$$

Dunque si ha: $\phi_n'(x) \geq 0 \quad \forall x \geq 0$.
Dal momento che $\phi_n(0) = 0$ deduciamo
che per ogni $M>0$ si ha

$$\sup_{x\in[0,M]} \left| x^2 - n \sin\left(\frac{x^2}{n}\right) \right| = M^2 - n \sin\left(\frac{M^2}{n}\right)$$

e quindi

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[0,M]} \left| x^2 - n \sin(x^2/n) \right| = 0 .$$

Si ha convergenza uniforme su ogni intervallo $[0,M]$ con $M<\infty$. (Tuttavia non si ha convergenza uniforme su $[0,\infty)$).

Possiamo scambiare limite e integrale:

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{1}{1+n\sin(x^2/n)}\,dx = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+n\sin(x^2/n)}\,dx =$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx = \Big[\arctg(x)\Big]_{x=0}^{x=1} = \frac{\pi}{4} .$$

$\square$