__Esercizio__ Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ un insieme chiuso. Un punto $\bar{x} \in A$ si dice proiezione metrica su A di un punto $x \in \mathbb{R}^n$ se

$$|x - \bar{x}| = \mathrm{dist}(x, A).$$

1) Provare che ogni $x \in \mathbb{R}^n$ ha almeno una proiezione metrica su A.

2) Provare che se A è convesso, la proiezione metrica è unica.

Soluzione. Sia $R > 0$ tale che $R > \mathrm{dist}(x, A)$.

Allora

$$\mathrm{dist}(x, A) = \mathrm{dist}(x, A \cap \overline{B_R(x)})$$

$$= \inf_{z \in A \cap \overline{B_R(x)}} |x - z|$$

La funzione $f(z) = |x - z|$

è continua ed assume minimo sul compatto $A \cap \overline{B_R(x)}$. Ogni punto di minimo $\bar{x} \in A$ è una proiezione metrica di x.

2) Sia A convesso e siano $x \in \mathbb{R}^n \setminus A$ e $y, z \in A$ tali che

$$|y - x| = |z - x| = \mathrm{dist}(x, A).$$

Allora

Perché la palla è rotonda

$$\left| \frac{y+z}{2} - x \right| < \mathrm{dist}(x, A) \quad \text{se } y \neq z,$$

e dunque $\dfrac{y+z}{2} \notin A$, contro la convessità.

<u>Problema</u> Sia $f \in C^1(\mathbb{R})$ e consideriamo

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 ; \ y \leq f(x)\}.$$

É vero che ogni $p \in \partial A = gr(f)$ è proiezione metrica di un $q \in \mathbb{R}^2 \setminus A$?

Stessa domanda con $f \in C^2(\mathbb{R})$.

Esercizio Sia $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} xy \sin\left(\frac{1}{xy}\right) & xy \neq 0 \\ 0 & xy = 0 \end{cases}.$$

Studiare continuità, derivabilità e differenziabilità di f.

Soluzione. La funzione $\phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\phi(t) = t \sin\left(\frac{1}{t}\right) \qquad t \neq 0$$

$$\phi(0) = 0$$

è continua su $\mathbb{R}$. Inoltre $\phi \in C^\infty(\mathbb{R} \setminus \{0\})$. In $t = 0$, ϕ non è derivabile, in quanto non esiste il

$$\lim_{t \to 0} \frac{\phi(t) - \phi(0)}{t} = \lim_{t \to 0} \sin\left(\frac{1}{t}\right).$$

Siccome $f(x,y) = \phi(xy)$, f è continua su $\mathbb{R}^2$, in quanto composizione di funzioni continue.

Studiamo l'esistenza delle derivate parziali.
In $0 \in \mathbb{R}^2$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0) = 0 \quad e \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0) = 0.$$

Nel punto $(x_0, 0) \in \mathbb{R}^2$ con $x_0 \neq 0$, non esiste $\frac{\partial f}{\partial y}$, infatti non esiste il

$$\lim_{y \to 0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, 0)}{y} = \lim_{y \to 0} x_0 \sin\left(\frac{1}{x_0 y}\right).$$

Analogamente, in $(0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ con $y_0 \neq 0$, non esiste $\frac{\partial f}{\partial x}$.

Su $\mathbb{R}^2 \setminus \{xy \neq 0\}$ f è di classe C^∞.

Dunque su tale insieme f è differenziabile (e quindi derivabile).

Studiamo la differenziabilità in $0 \in \mathbb{R}^2$.
In questo punto $\nabla f(0) = 0$. Quindi dobbiamo esaminare il limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - f(0) - \langle \nabla f(0), (x,y) \rangle}{\sqrt{x^2+y^2}} =$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \sin\left(\frac{1}{xy}\right) = L.$$

Con le coordinate polari $x = r\cos\vartheta$ e $y = r\sin\vartheta$ troviamo

$$\left| \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \sin\left(\frac{1}{xy}\right) \right| \leq \frac{|x|\,|y|}{\sqrt{x^2+y^2}} = r\,|\cos\vartheta|\,|\sin\vartheta| \leq r$$

con stima indipendente da ϑ.

Deduciamo che $L = 0$ e quindi f è differenziabile in $0 \in \mathbb{R}^2$.

__ESERCIZIO__ Provare che la funzione $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2y^2 \sin\left(\frac{1}{xy}\right) & xy \neq 0 \\ 0 & xy = 0 \end{cases}$$

è differenziabile in tutti i punti ma $f \notin C^1(\mathbb{R}^2)$.

Soluzione. La funzione $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$\phi(t) = \begin{cases} t^2 \sin\left(\frac{1}{t}\right) & t \neq 0 \\ 0 & t = 0 \end{cases}$$

è derivabile in tutti i punti con $\phi'(0) = 0$.
Quindi f è differenziabile su $\mathbb{R}^2$, in quanto composizione di funzioni differenziabili.

Per $xy \neq 0$ calcoliamo ad esempio

$$f_x(x,y) = 2xy^2 \sin\left(\frac{1}{xy}\right) + x^2y^2 \cos\left(\frac{1}{xy}\right) \cdot \left(-\frac{1}{x^2y}\right)$$

$$= 2xy^2 \sin\left(\frac{1}{xy}\right) - y \cos\left(\frac{1}{xy}\right).$$

Se $y_0 \neq 0$, il seguente limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,y_0)} 2xy^2 \sin\left(\frac{1}{xy}\right) - y \cos\left(\frac{1}{xy}\right)$$

__non__ esiste.

Quindi $f \notin C^1(\mathbb{R}^2)$. $\square$