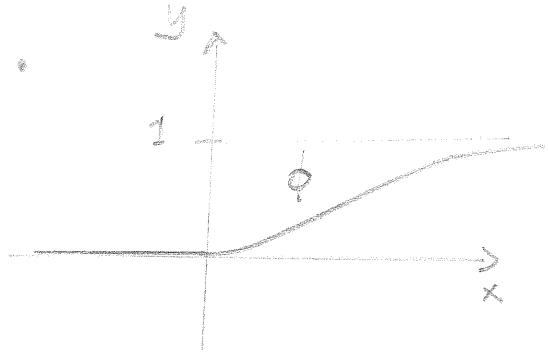
ESERCIZIO\PROBLEMA Sia $K \subset \mathbb{R}$ un chiuso. Costruire una funzione $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ tale che

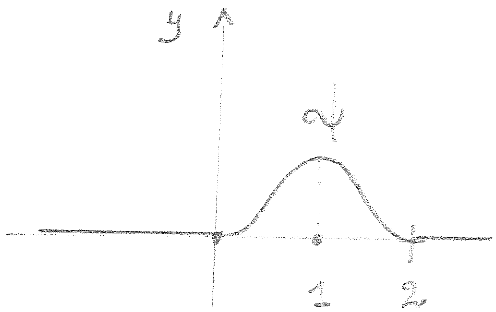
$$K = \{x \in \mathbb{R} : f(x) = 0\}.$$



La funzione

$$\phi(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 0 \\ e^{-\frac{1}{x}} & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

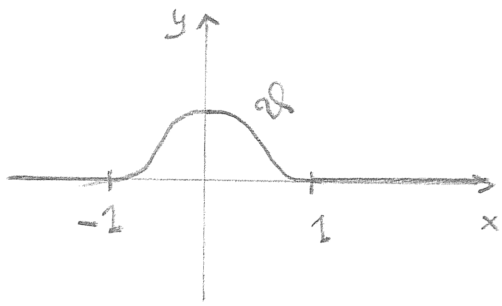
verifica $\phi \in C^\infty(\mathbb{R})$ e $\phi(x) > 0 \iff x > 0$.



La funzione

$$\psi(x) = \phi(x)\,\phi(2-x)$$

è $C^\infty(\mathbb{R})$ e $\psi(x) > 0 \iff 0 < x < 2$.

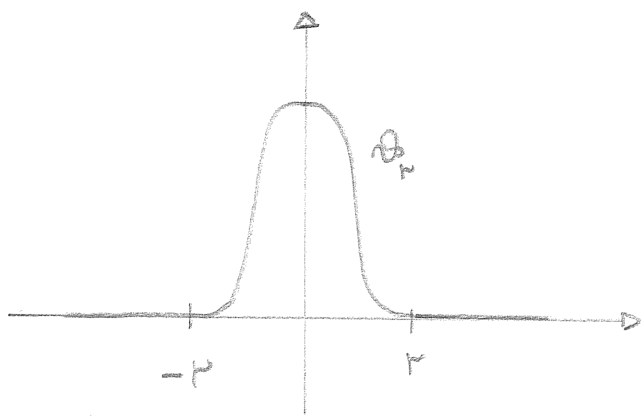


La funzione $\vartheta(x) = \psi(x+1)$

è pari e $\vartheta(x) > 0 \iff -1 < x < 1$.

Dato $r > 0$, possiamo riscalare

$$\vartheta_r(x) = \vartheta\left(\frac{x}{r}\right), \quad x \in \mathbb{R}.$$



Dunque: $\vartheta_r \in C^\infty(\mathbb{R})$ e

$$\begin{cases} \vartheta_r(x) > 0 & \text{per } -r < x < r, \\ \vartheta_r(x) = 0 & \text{per } |x| \geq r. \end{cases}$$

Consideriamo l'enumerazione

$$(\mathbb{R}\setminus K) \cap \mathbb{Q} = \{q_n \, ; \, n \in \mathbb{N}\}$$

e per ogni $n \in \mathbb{N}$ definiamo la distanza

$$r_n = \mathrm{dist}(q_n, K) > 0 .$$

Le funzioni

$$f_n(x) = \varphi_{r_n}(x - q_n) \quad , \qquad n \in \mathbb{N}$$

sono positive esattamente su $I_n = (q_n - r_n, q_n + r_n) \subset \mathbb{R}\setminus K$.

Osserviamo che

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n = \mathbb{R}\setminus K .$$

Infatti se $x \in \mathbb{R}\setminus K$ avremo $\delta = \mathrm{dist}(x, K) > 0$.

Preso $q_n \in (x - \delta/2, x + \delta/2)$ si avrà $r_n \geq \delta/2$

e quindi $x \in I_n$.

Vogliamo sommare tutte le funzioni f_n.

Un primo tentativo è questo:

$$g(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{2^n} f_n(x) .$$

Siccome $\|f_n\|_\infty = \|\varphi\|_\infty$, la serie converge uniformemente per il criterio di Weierstrass.

Quindi $g \in C(\mathbb{R})$ e inoltre $K = \{x \in \mathbb{R} : g(x) = 0\}$.

Bisogna migliorare la definizione. Definiamo per ogni $n \in \mathbb{N}$

$$M_n = \max \{ \| f_n^{(k)} \|_\infty : 0 \leq k \leq n \}.$$

La funzione desiderata è

$$f(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{2^n M_n} f_n(x).$$

Proviamo che $f \in C^1(\mathbb{R})$. La serie

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{f_n'(x)}{2^n M_n}$$

converge totalmente (e quindi uniformemente), infatti

$$\frac{\| f_n' \|_\infty}{M_n} \leq 1 \quad \text{per } n \geq 1.$$

Per i teoremi noti: $f \in C^1(\mathbb{R})$.

In effetti, $f \in C^k(\mathbb{R})$ per ogni $k \in \mathbb{N}$. Infatti la serie

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{f_n^{(k)}(x)}{2^n M_n}$$

converge uniformemente, essendo

$$\frac{\| f_n^{(k)} \|_\infty}{M_n} \leq 1 \quad \text{per } n \geq k.$$

Quindi $f \in C^\infty(\mathbb{R})$.

□

ESERCIZIO Si consideri la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = \int_0^1 \frac{1 - e^{xyt}}{t + t^2}\, dt \,, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

(1) Provare che f è ben definita $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$;

(2) Provare che $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$ (risp. $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$);

(3) Calcolare $\nabla f(x,y)$ (ad es. per $(x,y) = (0,0)$).

Soluzione. È $f(x,y) = \phi(xy)$ con

$$\phi(s) = \int_0^1 \frac{1 - e^{st}}{t + t^2}\, dt \,, \quad s \in \mathbb{R}.$$

Osserviamo che $e^{st} = st + o(st) = st\,(1 + o(1))$

e quindi l'integranda si estende in modo continuo fino a $t = 0$. L'integrale è definito come integrale di Riemann.

Se proviamo che $\phi \in C^1(\mathbb{R})$ (risp. $\phi \in C^\infty(\mathbb{R})$) segue il punto (2). Abbiamo

$$e^{st} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(st)^k}{k!}$$

con conv. uniforme per st in un compatto.

Quindi

$$\phi(s) = -\int_0^1 \frac{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{s^k t^k}{k!}}{t(1+t)}\, dt =$$

$$= -\int_0^1 \frac{1}{1+t} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{s^k}{k!} t^{k-1}\, dt$$

dove, per s fissato, si ha convergenza uniforme in $t \in [0,1]$.

Dunque,

$$\phi(s) = - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{s^k}{k!} \cdot c_k \, , \qquad 0 \leq c_k = \int_0^1 \frac{t^{k-1}}{t+1} \, dt \leq 1 .$$

La serie di potenze che definisce ϕ ha raggio di convergenza $R = \infty$. Quindi $\phi \in C^\infty(\mathbb{R})$. In particolare,

$$\phi'(0) = - \frac{c_1}{1!} = - \int_0^1 \frac{1}{t+1} \, dt$$

$$= - \Big[\log(t+1) \Big]_{t=0}^{t=1} = - \log 2 .$$

Per la regola della derivata della funzione composta:

$$df(x,y) = d\phi(xy) \circ dg(x,y) \qquad \text{con } g(x,y) = x \cdot y$$

In termini di gradiente

$$\nabla f(x,y) = \phi'(xy) \cdot (y, x)$$

e nel punto $x = y = 0$

$$\nabla f(0) = \phi'(0) \, (0,0) = 0 .$$

$\square$