ESERCIZIO Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione tale che $\mathrm{Lip}(f) < 1$.
Provare che $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$F(x,y) = \big(x + f(y),\ y + f(x) \big), \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2,$$

è 1-1 e su. Provare che $F^{-1} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ è Lipschitz.

SOLUZIONE. Dato $(\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2$ cerchiamo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tale che

$$(*) \qquad \begin{cases} x + f(y) = \xi \\ y + f(x) = \eta \end{cases}$$

ovvero

$$\begin{cases} x = \xi - f(y) \\ y = \eta - f(x) \end{cases}.$$

Definiamo la funzione $G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$G(x,y) = \big(\xi - f(y),\ \eta - f(x) \big).$$

Proviamo che G è una contrazione per la distanza standard:

$$|G(x,y) - G(\bar{x},\bar{y})| = \big| \big(f(\bar{y}) - f(y),\ f(\bar{x}) - f(x) \big) \big| =$$

$$= \sqrt{|f(\bar{y}) - f(y)|^2 + |f(\bar{x}) - f(x)|^2} \leq$$

$$\leq \sqrt{L^2 |\bar{y} - y|^2 + L^2 |\bar{x} - x|^2} = L \, |(x,y) - (\bar{x},\bar{y})|$$

con $L = \mathrm{Lip}(f)$.

Per il Teorema di Banach G ha un punto fisso $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ che è dunque la soluzione <u>unica</u> di $(*)$.

Questo prova che F è 1-1 e su.

Cerco una costante di Lipschitz per F^{-1},

É sufficiente trovare $m>0$ tale che

$$(**) \qquad \left| F(x,y) - F(\bar{x},\bar{y}) \right| \geqslant m \left| (x,y) - (\bar{x},\bar{y}) \right|$$

per ogni $(x,y), (\bar{x},\bar{y}) \in \mathbb{R}^2$.

Per la prima coordinata di F:

$$\left| \left(x+f(y)\right) - \left(\bar{x} + f(\bar{y})\right) \right| = \left| x-\bar{x} + f(y) - f(\bar{y}) \right| \geqslant$$

$$\geqslant \left| |x-\bar{x}| - |f(y)-f(\bar{y})| \right|$$

e analogamente per la seconda

$$\left| \left(y+f(x)\right) - \left(\bar{y} + f(\bar{x}\right) \right| \geqslant \left| |y-\bar{y}| - |f(x)-f(\bar{x})| \right|.$$

Lavoriamo con la norma $\|(x,y)\|_1 = |x| + |y|$.

Avremo:

$$\| F(x,y) - F(\bar{x},\bar{y}) \|_1 \geqslant \left| |x-\bar{x}| - |f(y)-f(\bar{y})| \right| + \left| |y-\bar{y}| - |f(x)-f(\bar{x}) \right.$$

$$\overset{\text{uso } L=\mathrm{Lip}(f)<1}{\geqslant} (1-L)\,|x-\bar{x}| + (1-L)\,|y-\bar{y}| = (1-L)\, \| (x,y) - (\bar{x},\bar{y}) \|_1$$

Siccome $|\cdot|$ e $\|\cdot\|_1$ sono equivalenti, questo prova $(**)$.

$\square$