ESERCIZIO Sia $K \subset \mathbb{R}^n$ un insieme chiuso, $K \neq \emptyset$. Sia $x \in \mathbb{R}^n \setminus K$ un punto in cui $f = dist(\cdot\,; K)$ è differenziabile. Provare che x ha proiezione metrica unica.

SOLUZIONE. Sia $\bar{x} \in K$ una proiezione metrica di x:

$$|x - \bar{x}| = dist(x; K).$$

Ogni punto $y \in [\bar{x}, x]$ ha ancora proiezione metrica $\bar{x}$. Dunque, per $t \in [0,1]$:

$$f(x + t(\bar{x} - x)) = (1-t)\,|x - \bar{x}|.$$

La derivata direzionale di f nella direzione $v = x - \bar{x}$ è

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x) = \lim_{t \to 0^-} \frac{f(x+tv) - f(x)}{t}$$

$$= \lim_{t \to 0^-} \frac{f(x - t(\bar{x} - x)) - f(x)}{t}$$

$$= - \lim_{t \to 0^+} \frac{f(x + t(\bar{x} - x)) - f(x)}{t}$$

$$= |x - \bar{x}|$$

Quindi con $v = x - \bar{x}$:

$$(*) \qquad \langle \nabla f(x), v \rangle = |x - \bar{x}| = |v|$$

da cui si deduce che $|\nabla f(x)| \geq 1$.

D'altra parte, per ogni altro $v \in \mathbb{R}^n$:

$$\langle \nabla f(x), v \rangle = \frac{\partial f}{\partial v}(x) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x+tv) - f(x)}{t}$$

$$\leq \mathrm{Lip}(f)\, |v| \leq |v| .$$

Con $v = \nabla f(x)$ deduciamo che $|\nabla f(x)| \leq 1$.

Quindi

$$(**) \qquad |\nabla f(x)| = 1 .$$

La $(*)$, ovvero :

$$\left\langle \nabla f(x), \frac{x - \bar{x}}{|x - \bar{x}|} \right\rangle = 1$$

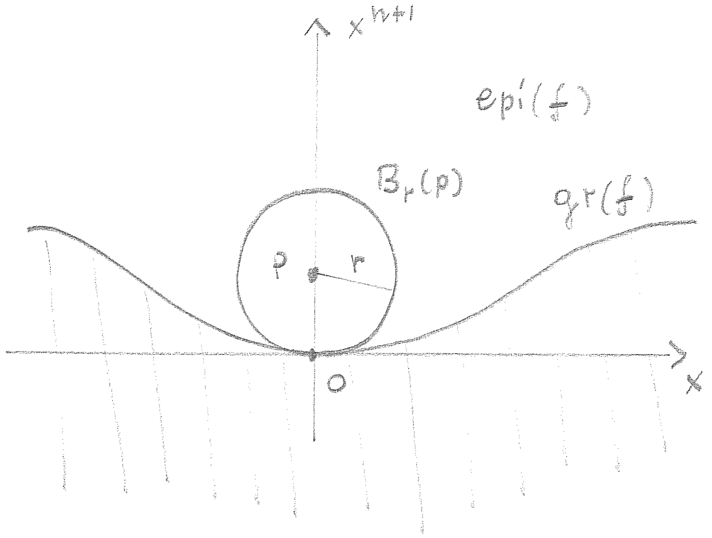
insieme a $(**)$ implica che

$$\nabla f(x) = \frac{x - \bar{x}}{|x - \bar{x}|} . \qquad \square$$

Esempio. Sia $f \in C^2(\mathbb{R}^n)$ una funzione tale che $f(0) = 0$ e $\nabla f(0) = 0$. Cerchiamo $p \in \mathbb{R}^{n+1}$ ed $r > 0$ tali che

$$B_r(p) \subset \{ (x, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : x_{n+1} > f(x) \} = epi(f)$$

$$\partial B_r(p) \cap gr(f) = \{0\}$$



La funzione f ha lo sviluppo

$$f(x) = f(x_0) + \langle \nabla f(x_0), x - x_0 \rangle + \frac{1}{2} \langle Hf(x_0)(x - x_0), x - x_0 \rangle$$
$$+ o(|x - x_0|^2)$$

per $x \to x_0 = 0$

Dunque in $x_0 = 0$

$$f(x) = \frac{1}{2} \langle Hf(x_0) x, x \rangle + o(|x|^2) \quad \text{per } x \to 0.$$

Scegliamo $p = r e_{n+1} = (0, \ldots, 0, r) \in \mathbb{R}^{n+1}$:

$$(x, x_{n+1}) \in \partial B_r(p) \iff |x|^2 + (x_{n+1} - r)^2 = r^2$$

$$\iff (x_{n+1} - r)^2 = r^2 - |x|^2 \iff x_{n+1} = r \pm \sqrt{r^2 - |x|^2}$$

Consideriamo la funzione

$$g(x) = r - \sqrt{r^2 - |x|^2} \quad , \qquad |x| \leq r.$$

Chiaramente $g(0) = 0$. Inoltre

$$g_{x_i}(x) = -\frac{1}{2} \frac{-2x_i}{\sqrt{r^2 - |x|^2}} = \frac{x_i}{\sqrt{r^2 - |x|^2}}$$

e quindi $\nabla g(0) = 0$.

Calcoliamo le derivate seconde:

$$g_{x_i x_j}(x) = \frac{\delta_{ij} \sqrt{r^2 - |x|^2} - x_i \frac{-x_j}{\sqrt{r^2 - |x|^2}}}{r^2 - |x|^2}$$

dove $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$. Dunque

$$Hg(0) = \frac{1}{r} I_n \quad \text{matrice identità } n \times n.$$

Dunque

$$g(x) = g(0) + \langle \nabla g(0), x \rangle + \frac{1}{2} \langle Hg(0)x, x \rangle + o(|x|^2$$

$$= \frac{1}{2r} |x|^2 + o(|x|^2).$$

Confrontiamo f e g:

$$f(x) \leq \frac{1}{2} \left|Hf(0)x\right| |x| + o(|x|^2)$$

$$\leq \frac{1}{2} \|Hf(0)\| \cdot |x|^2 + o(|x|^2)$$

Se scegliamo $r>0$ tale che $\|Hf(0)\| < \frac{1}{r}$:

$$f(x) - g_r(x) \leq \frac{1}{2}\left(\|Hf(0)\| - \frac{1}{r}\right)|x|^2 + o(|x|^2)$$

$$= |x|^2 \left[\frac{1}{2}\left(\|Hf(0)\| - \frac{1}{r}\right) + o(1)\right]$$

$$< 0 \quad \text{per } 0<|x|<\delta$$

con $\delta>0$ sufficientemente piccolo.

$\square$