Analisi Matematica 2 – Matematica

Convergenza uniforme Foglio 1

Esercizio 1 Sia $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, la successione di funzioni

$$f_n(x) = \frac{1}{n} \log(1 + \mathrm{e}^{nx}), \quad x \in \mathbb{R}.$$

i) Studiare la convergenza puntuale e uniforme della successione $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

ii) Studiare la convergenza puntuale e uniforme della successione delle derivate $(f'_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Esercizio 2 Sia $f : (-R, R) \to \mathbb{R}$ la funzione

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad x \in (-R, R),$$

dove $0 < R \leq \infty$ è il raggio di convergenza della serie di potenze. Provare che $f \in C^\infty(-R, R)$. Verificare inoltre che

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Esercizio 3 Sia $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, la successione di funzioni

$$f_n(x) = \sqrt[n]{1 + x^{2n}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

i) Studiare la convergenza puntuale e uniforme della successione $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

ii) Studiare la convergenza puntuale e uniforme della successione delle derivate $(f'_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Esercizio 4 Costruire funzioni $f, f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, tali che:
1) $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$;
2) per ogni $-\infty \leq a < b \leq \infty$ la convergenza al punto 1) non è uniforme su (a, b).

Esercizio 5 Costruire una funzione $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ tale che:
1) f è Riemann-integrabile.
2) Detto $A = \{x \in [0, 1] : \ f \text{ non è continua in } x\}$ l'insieme dei punti di discontinuità di f, si ha $\bar{A} = [0, 1]$.