Analisi Matematica 2 – Matematica

Differenziabilità Foglio 3

Esercizio 1 Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3y^2}{x^4+y^6} & (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

1) Provare che f è continua su $\mathbb{R}^2$.

2) Stabilire se f è differenziabile in $(0,0)$.

Esercizio 2 In dipendenza da $\alpha \in \mathbb{R}$ si consideri la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = \begin{cases} (2x^2+y^2)^\alpha \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) & (x,y) \neq (0,0) \\ \\ 0 & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

1) Studiare la continuità e la differenziabilità di f al variare di α.

2) Stabilire se esistono α tali che f sia differenziabile su $\mathbb{R}^2$ ma non di classe $C^1(\mathbb{R}^2)$.

Esercizio 3 Sia $X = C([0,1])$ munito della sup-norma, e consideriamo l'applicazione $F : X \to \mathbb{R}$

$$F(\varphi) = \int_0^1 \varphi(t)^2 dt.$$

Provare che F è differenziabile in ogni punto $\varphi \in X$ e calcolare il differenziale $dF(\varphi) \in \mathcal{L}(X;\mathbb{R})$.

Esercizio 4 Siano (X,d) uno spazio metrico, $A \subset X$ e sia $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione uniformemente continua su A. Provare che per ogni $x_0 \in \bar{A}$ esiste finito il seguente limite

$$\bar{f}(x_0) = \lim_{x \to x_0} f(x).$$

In altri termini, f si estende in modo continuo su $\bar{A}$.

Esercizio 5 Sia $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$ e sia $f \in C(\bar{A}) \cap C^1(A)$ una funzione con derivate parziali f_x ed f_y uniformemente continue su A. Provare che esistono finite anche le seguenti derivate parziali al bordo

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x+t,0) - f(x,0)}{t} \quad \text{e}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y^+}(x,0) = \lim_{t \to 0^+} \frac{f(x,t) - f(x,0)}{t}.$$

Esercizio 6 Dimostrare che esiste una costante $K = K(n)$ dipendente da $n \in \mathbb{N}$ con la seguente proprietà. Detta $B = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}$ la palla unitaria in $\mathbb{R}^n$, ogni funzione $f : B \to B$ di classe C^1 verifica

$$\inf_{x \in B} \|df(x)\| \le K.$$

ESERCIZIO SBAGLIATO