

Analisi Matematica 2 – Matematica

Esercizio 1 Al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ si consideri la funzione $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x, y) = x^3 - y^3 + 3\alpha xy.$$

Determinare i punti critici di f ed eventuali punti di minimo/massimo locale/globale.

Esercizio 2 Siano $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq 2\pi\}$ ed $f : K \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x, y) = \sin(2x) \cos(y).$$

- i) Provare che f assume massimo e minimo su K ;
- ii) Calcolare i punti critici di f nell'interno di K e classificarli;
- iv) Tracciare un grafico qualitativo di f ;
- v) Determinare l'insieme $f(K)$.

Esercizio 3 Sia $\alpha > 0$ un parametro fissato e consideriamo l'insieme

$$A = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq \frac{1}{\alpha^2 + y^2} \right\}.$$

Provare che la funzione $f(x, y) = 2xy$ assume massimo su A e calcolarlo.

Esercizio 4 Una funzione $f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ si dice (positivamente) omogenea di grado $\alpha \in \mathbb{R}$ se $f(tx) = t^\alpha f(x)$ per ogni $x \neq 0$ e $t > 0$.

Provare che se $f \in C^1(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ è omogenea di grado α allora le sue derivate parziali sono omogenee di grado $\alpha - 1$. Verificare inoltre la formula di Eulero, per $x \neq 0$,

$$\langle \nabla f(x), x \rangle = \alpha f(x).$$

Esercizio 5 Sia $K \subset \mathbb{R}^n$ un insieme compatto con interno non vuoto, $\text{int}(K) \neq \emptyset$, e sia $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione con queste proprietà: 1) f è continua su K ; 2) f è differenziabile in $\text{int}(K)$; 3) f è costante su ∂K .

Dimostrare che esiste almeno un punto $x \in \text{int}(K)$ tale che $\nabla f(x) = 0$.