

# Analisi Matematica 2 – Matematica

**Esercizio 1** Si consideri l'equazione differenziale

$$y' = (y^2 - y) \log(2 + x).$$

- i) Determinare il suo integrale generale.
- ii) Risolvere il problema di Cauchy con dato  $y(-1) = 1/2$ .

Soluzione:

$$y(x) = \frac{e^{x+1}}{e^{x+1} + (x+2)^{x+2}}, \quad x+2 > 0.$$

**Esercizio 2** Si consideri l'equazione differenziale

$$x^3 y' - 2y + 2x = 0.$$

Provare che:

- i) Ogni soluzione  $y \in C^1(\mathbb{R} \setminus \{0\})$  si estende ad una funzione in  $C^1(\mathbb{R})$ ;
- ii) L'equazione non ha soluzioni analitiche definite in un intorno di  $x = 0$ .

**Esercizio 3** Sia  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione continua tale che  $f(0) = 0$ ,  $f(t) > 0$  se  $t \neq 0$ , e

$$\int_0^1 \frac{dt}{f(t)} = \infty.$$

Provare che  $y = 0$  è l'unica soluzione del Problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = f(y) \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

**Esercizio 4 (Equazione della catenoid)** Calcolare la soluzione  $y \in C^2(\mathbb{R})$  del seguente Problema di Cauchy:

$$\begin{cases} \frac{y^2 y''}{(1 + y'^2)^{3/2}} = 1 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0. \end{cases}$$

Suggerimento: dividere per  $y^2$ , moltiplicare per  $y'$ , integrare una prima volta.

Commento: La soluzione è una curva che descrive una corda, catena, filo della luce che pende per effetto della gravità appeso a due supporti. Galileo pensava che la curva fosse un arco di parabola.