Analisi Matematica 2 – Matematica

Esistenza ed unicità locale delle soluzioni — Foglio 8

Esercizio 1 Si consideri il Problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \sqrt{y^2 + x^2 + 1} \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

i) Provare che il problema ha un'unica soluzione locale $y \in C^1(-\delta, \delta)$ per qualche $\delta > 0$;

ii) Provare che la soluzione è una funzione dispari: $y(-x) = -y(x)$ per ogni x;

iii) Provare che la soluzione è convessa per $x \geq 0$;

iv) Provare che la soluzione è definita per ogni $x \in \mathbb{R}$ (usare il Teorema di esistenza globale non ancora dimostrato in classe);

v) Provare che $y(x) \geq \sinh(x)$ per ogni $x \geq 0$.

Esercizio 2 In questo esercizio vogliamo studiare il seguente Problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \sqrt{x} + \sqrt{|y|}, \quad x \geq 0 \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

i) Accertarsi che il Teorema di esistenza e unicità locale nelle ipotesi Lipschitz non si può applicare.

ii) Dimostrare che ogni soluzione y verifica $y(x) \geq \frac{2}{3}x^{3/2}$ per $x \geq 0$.

iii) Usando il Teorema delle contrazioni provare che il problema ha una soluzione unica nell'insieme

$$X = \Big\{ y \in C([0, \delta]) : y(0) = 0 \text{ e } y(x) \geq \frac{2}{3}x^{3/2} \text{ per } x \in [0, \delta] \Big\},$$

pur di scegliere $\delta > 0$ sufficientemente piccolo.

iv) Usando il Teorema sull'esistenza globale delle soluzioni enunciato (ma non ancora dimostrato) in classe provare che la soluzione è definita su tutto $[0, \infty)$.

v) Dimostrare che

$$\lim_{x \to \infty} \frac{y(x)}{x^2} = \frac{1}{4}, \quad \text{e} \quad \lim_{x \to 0^+} \frac{y(x)}{x^{3/2}} = \frac{2}{3}.$$