Analisi Matematica 2 – Matematica

Equazioni differenziali. Invertibilità locale — Foglio 9

Esercizio 1 Dato un numero reale $y_0 \neq 0$, si consideri il Problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{1}{x^2+y^2} \\ y(0) = y_0. \end{cases}$$

Dimostrare che:

i) Esiste un'unica soluzione locale. Discutere eventuali simmetrie.

ii) Le soluzioni sono globalmente definite su $\mathbb{R}$.

iii) I limiti $L^- = \lim\limits_{x\to-\infty} y(x)$ e $L^+ = \lim\limits_{x\to+\infty} y(x)$ esistono finiti.

iv) Stimare L^+ ed L^- in relazione a y_0.

Esercizio 2 Determinare tutti i valori del parametro $\lambda \in \mathbb{R}$ tali che la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$f(x,y) = \big(x + \lambda y, y - (\lambda+1)x^2\big), \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2,$$

sia un diffeomorfismo. Calcolare in questi casi la funzione inversa.

Esercizio 3 Sia $f \in C^1(\mathbb{R})$ una funzione tale che $f(1) = 0$ e sia $0 < x_0 < 1$ un numero reale. Provare che il Problema di Cauchy

$$\begin{cases} x' = xf(x^2+y^2) - y \\ y' = yf(x^2+y^2) + x \\ x(0) = x_0 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

ha un'unica soluzione che è definita su tutto $\mathbb{R}$.
Suggerimento: Passare a coordinate polari ed esaminare la componente radiale.

Esercizio 4 Sia $f \in C(\mathbb{R})$ una funzione continua tale che $tf(t) \geq 0$ per ogni $t \in \mathbb{R}$. Provare che il Problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + \mathrm{e}^{-x} f(y) = 0 \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$$

ha l'unica soluzione $y = 0$. Suggerimento: moltiplicare per $\mathrm{e}^{x} y'$ ed usare il Lemma di Gronwall.