Analisi Matematica 2 - A

Nome: Appello scritto del 5 Luglio 2013

Esercizio 1 (10 punti) Sia $\alpha > 0$ un parametro fissato e si consideri la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita nel seguente modo

$$f(x,y) = \begin{cases} |y|^\alpha \sin\left(\dfrac{x}{y}\right), & y \neq 0, \\ 0 & y = 0. \end{cases}$$

Calcolare tutti gli $\alpha > 0$ tali che:

i) f sia differenziabile su tutto $\mathbb{R}^2$;

ii) le derivate parziali di f siano continue nel punto $0 \in \mathbb{R}^2$.

iii) f sia di classe $C^1(\mathbb{R}^2)$.

Esercizio 2 (10 punti) Si consideri il Problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = y^2 + x^2 - 1 \\ y(0) = 0, \end{cases}$$

dove y è la funzione incognita ed x è la sua variabile.

i) Provare che il problema ha un'unica soluzione locale.

ii) Discutere eventuali simmetrie della soluzione.

iii) Studiare qualitativamente la monotonia delle soluzione y.

iv) Sia $(-b, b) \subset \mathbb{R}$, con $0 < b \leq \infty$, l'intervallo di definizione della soluzione massimale. Provare che $b < \infty$.

v) (facoltativo) Provare che $b > \sqrt{3/2}$.

Esercizio 3 (10 punti) Studiare la convergenza puntuale e uniforme della seguente serie di funzioni:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1 + n^2 x)\mathrm{e}^{-nx}}{1 + n^2}, \quad x \geq 0.$$

Tempo a disposizione: 2.30 ore.