Corso di Analisi Matematica 2 - 2012-13
Parte A
Programma finale del corso

Convergenza uniforme: Sup-norma. Teorema dello scambio dei limiti, continuità del limite uniforme. Criterio di Abel-Dirichlet per la convergenza uniforme di serie. Teorema di Dini. Convergenza uniforme e differenziabilità, scambio di limite e derivata, scambio di somma e derivata. Convergenza uniforme e integrale di Riemann, scambio di limite e integrale. Esercizi.

Spazi metrici. Continuazione: Tutte le norme in $\mathbb{R}^n$ sono equivalenti. Norme $\|\cdot\|_p$ in $\mathbb{R}^n$. Lo spazio $C(K)$ è completo. Spazio $C^1([0,1])$. Lo spazio $C([0,1])$ con la norma L^1 non è completo. Funzioni Lipschitziane, cenno al Teorema di Ascoli-Arzelà. Contrazioni e Teorema di punto fisso di Banach. Enunciato dei teoremi di Brouwer e Schauder. Spazio delle trasformazioni lineari e continue, norma di un operatore, caratterizzazione della continuità. Totale limitatezza e caratterizzazione degli spazi metrici compatti. Esercizi.

Calcolo differenziale in $\mathbb{R}^n$. Derivate parziali e gradiente. Significato geometrico del gradiente. Derivate direzionali. Matrice Jacobiana di funzioni a valori vettoriali. Funzioni differenziabili e differenziale. Proprietà elementari del differenziale. Caratterizzazione della differenziabilità tramite lo sviluppo di Taylor. La differenziabilità implica la continuità e l'esistenza delle derivate direzionali. Identificazione di differenziale e matrice Jacobiana. Piano tangente ad un grafico. Teorema sul differenziale della funzione composta. Derivata di una funzione lungo una curva. Teorema del valor medio per funzioni scalari. Teorema del valor medio per funzioni vettoriali. Disuguaglianza di Lipschitzianità (Corollario 6.3). Le funzioni di classe C^1 sono differenziabili. Enunciato del Teorema di Rademacher. Derivate di ordine superiore. Teorema di Schwarz. Punti critici e punti di estremo locale. Funzioni localmente costanti e funzioni con gradiente nullo su un aperto connesso (De Marco). Formula di Taylor al secondo ordine. Richiami sulle forme quadratiche. Condizioni necessarie di estremalità. Condizione sufficiente di estremalità. Funzioni convesse: caratterizzazione delle funzioni convesse e continue (senza dim.), le funzioni convesse sono localmente Lipschitziane, caratterizzazione delle funzioni convesse di classe C^1 e di classe C^2, convessità e punti di minimo, enunciato del Teorema di Alexandrov. Esempi ed esercizi.

Equazioni differenziali ordinarie. Equazioni differenziali in forma normale. Legame fra equazioni di ordine n e sistemi di n equazioni del primo ordine. Equazioni lineari del primo ordine. Equazioni a variabili separabili. Esempio di Peano. Equazioni omogenee e di Bernoulli. Problema di Cauchy e sua riformulazione integrale. Teorema di esistenza e unicità locale della soluzione con ipotesi Lipschitz. Soluzioni massimali e criterio di prolungamento ("fuga dai compatti"). Lemma di Gronwall e criterio di esistenza globale con crescita al più lineare. Cenno ai sistemi lineari. Studio qualitativo delle soluzioni. Dipendenza continua dai dati: Teorema di Kamke. Enunciato del teorema sulla dipendenza C^1 dai dati iniziali. Flusso di un campo vettoriale. Esercizi.

Teoremi di invertibilità locale e della funzione implicita. Diffeomorfismi e diffeomorfismi locali. Teorema di invertibilità locale. Teorema di Dini. Esempi.

Sottovarietà differenziabili di $\mathbb{R}^n$. Definizione di sottovarieà differenziabile. Definizione di insieme parametrizzabile in modo regolare. Teorema di equivalenza. Spazio tangente e spazio normale. Teorema sulla caratterizzazione dello spazio tangente. Esempi.

Curve. Curve rettificabili. Variazione totale e lunghezza di curve. Esempio di curva derivabile ma non rettificabile. Formula della lunghezza. Parametrizzazione a lunghezza d'arco. Lunghezza e convergenza uniforme. Esercizi.

Esercizi. Fanno parte integrante del Programma d'esame anche gli esercizi settimanali messi in rete.

Modalità dell'esame scritto. Tre o quattro esercizi/problemi da risolvere sugli argomenti trattati nel corso: 1) Convergenza uniforme di successioni e serie di funzioni. 2) Derivazione e integrazione di serie di funzioni. 3) Contrazioni e punti fissi. 4) Funzioni differenziabili, C^1 e C^2. 5) Punti critici, massimi e minimi locali e assoluti. 6) Funzioni convesse. 7) Equazioni differenziali lineari del primo ordine e a variabili separabili. 8) Problema di Cauchy. Analisi qualitativa. 9) Teoremi di invertibilità locale e della funzione implicita. 10) Sottovarietà differenziabili di $\mathbb{R}^n$. 11) Curve in $\mathbb{R}^n$ e loro lunghezza.

Modalità dell'esame orale. All'esame orale verranno poste tre domande: 1) Enunciare e illustrare una definizione anche tramite esempi. 2) Enunciare e dimostrare un teorema. 3) Risolvere un esercizio tratto dai fogli settimanali messi in rete durante il corso.

R. Monti
16 Gennaio 2013