<u>Esercizio</u> Studiare la convergenza uniforme della successione di funzioni

$$f_n(x) = 2^n x \left(1-\sqrt[n]{|x|}\right)^n, \qquad x \in \mathbb{R} \text{ ed } n \in \mathbb{N}.$$

Soluzione. Chiaramente $f_n(-x) = -f_n(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$. Quindi è sufficiente considerare il caso $x \geq 0$.

Studiamo la funzione $f_n$. La sua derivata è per $x>0$

$$f_n'(x) = 2^n \left(1-\sqrt[n]{x}\right)^n + 2^n x\, n \left(1-\sqrt[n]{x}\right)^{n-1} \cdot \left(-\frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1}\right)$$

$$= 2^n \left(1-\sqrt[n]{x}\right)^{n-1} \left(1-\sqrt[n]{x}-\sqrt[n]{x}\right)$$

$$= 2^n \left(1-\sqrt[n]{x}\right)^{n-1} \left(1-2\sqrt[n]{x}\right).$$

Limitiamo lo studio all'intervallo $[0,1]$, dove $1-\sqrt[n]{x} \geq 0$:

| | $0$ — $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ | $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ — $1$ |
|---|---|---|
| $f_n'$ | $+ + +$ | $- - -$ |
| $f_n$ | $\uparrow$ | $\downarrow$ |

Siccome $f_n(0) = f_n(1) = 0$ deduciamo che

$$\max_{x\in[0,1]} f_n(x) = f_n\left(\frac{1}{2^n}\right) = 2^n \frac{1}{2^n} \left(1-\frac{1}{2}\right)^n$$

$$= \frac{1}{2^n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Quindi $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente a $0$ sull'intervallo $[0,1]$.

Fissiamo ora $M > 1$. Se $x \in [1, M]$:

$$|f_n(x)| = 2^n x \left( \sqrt[n]{x} - 1 \right)^n \leq 2^n M \left( \sqrt[n]{M} - 1 \right)^n .$$

Siccome

$$\lim_{n \to \infty} \left( \sqrt[n]{M} - 1 \right) = 0,$$

esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che $\sqrt[n]{M} - 1 < \frac{1}{3} \quad \forall n \geq \bar{n}$.

Dunque per $n \geq \bar{n}$

$$2^n M \left( \sqrt[n]{M} - 1 \right)^n \leq M \left( \frac{2}{3} \right)^n \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$$

e quindi

$$\lim_{n \to \infty} \sup_{x \in [1, M]} |f_n(x)| = 0$$

e c'è convergenza uniforme su $[1, M]$, per ogni $M > 1$.
Su $[0, \infty)$ non c'è convergenza uniforme, in quanto

$$\lim_{x \to \infty} |f_n(x)| = +\infty ,$$

$\square$

<u>Esercizio</u> Sia $g \in C(\mathbb{R})$ una funzione continua. Provare che l'equazione funzionale

$$(1+x^2)\,\varphi(x) + x \sin(\varphi(x)) = g(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

ha un'unica soluzione continua $\varphi \in C(\mathbb{R})$.

Assumendo che $g \in C^1(\mathbb{R})$, provare che $\varphi \in C^1(\mathbb{R})$.

Soluzione. Fissiamo $M>0$ e sia $X = C([-M,M])$ munito della ~~sup~~ norma $\|\cdot\|_\infty$. Sia $T: X \to X$ l'applicazione

$$T\varphi(x) = \frac{1}{1+x^2}\Big( g(x) - x \sin(\varphi(x))\Big), \quad x \in [-M,M].$$

Proviamo che $T$ è una contrazione. Per $\varphi, \psi \in X$ si ha

$$\big|T\varphi(x) - T\psi(x)\big| = \frac{|x|}{1+x^2}\,\big|\sin(\varphi(x)) - \sin(\psi(x))\big|$$

$$\leq \frac{1}{2}\,|\varphi(x) - \psi(x)|,$$

dal momento che $\dfrac{|x|}{1+x^2} \leq \dfrac{1}{2}$ $\forall x \in \mathbb{R}$ e $|\sin(t) - \sin(s)| \leq |t-s|$

Dunque
$$\|T\varphi - T\psi\|_\infty \leq \frac{1}{2}\,\|\varphi - \psi\|_\infty .$$

Siccome $X$ è uno spazio metrico completo, $T$ ha un unico punto fisso su $X$:

$$T\varphi(x) = \varphi(x) \quad \forall x \in [-M,M].$$

Siccome $M > 0$ è generico l'equazione è verificata per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Consideriamo la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = (1+x^2)\,y + x \sin(y) - g(x).$$

Se $g \in C^1(\mathbb{R})$ allora $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$. Inoltre

$$f_x = 2xy + \sin(y) - g'(x),$$

$$f_y = 1 + x^2 + x \cos(y).$$

Siccome

$$f_y = (1+x^2)\left(1 + \frac{x}{1+x^2}\cos y\right)$$

$$\geq (1+x^2)\,\frac{1}{2} \geq \frac{1}{2}$$

deduciamo che $f_y(x,y) \neq 0$ per ogni $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Dunque, per il Teorema della funzione implicita l'equazione $f(x,y) = 0$ definisce una funzione $x \mapsto \varphi(x)$ di classe $C^1$ tale che $f(x, \varphi(x)) = 0$ identicamente.

$\square$