Esercizio. Si consideri il Problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{1}{x+y} \\ y(0) = 1 \end{cases}.$$

1) Provare che il Problema di Cauchy ha un'unica soluzione locale, che è crescente e concava. Tratteggiarne il grafico.

2) Sia $(a,b) \subset \mathbb{R}$ l'intervallo di definizione della soluzione massimale. Provare che $b = \infty$ e che $a > -\frac{1}{2}$.

3) Provare che

$$\lim_{x \to \infty} \frac{y(x)}{\log_e x} = 1$$

4) Verificare che $a = \log_e 2 - 1$.

Soluzione. Sia $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,;\, y > -x\}$. Allora $(0,1) \in \Omega$ ed $f : \Omega \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = \frac{1}{x+y}, \qquad (x,y) \in \Omega,$$

è di classe $C^\infty$ e quindi localmente di Lipschitz.

Per il Teorema di esistenza e unicità locale esistono $\delta > 0$ ed $y \in C^1(-\delta,\delta)$ soluzione del Problema di Cauchy.

Siccome $f > 0$ in $\Omega$, la soluzione $y$ è strettamente crescente.

In effetti si ha $y \in C^\infty(-\delta,\delta)$ e inoltre

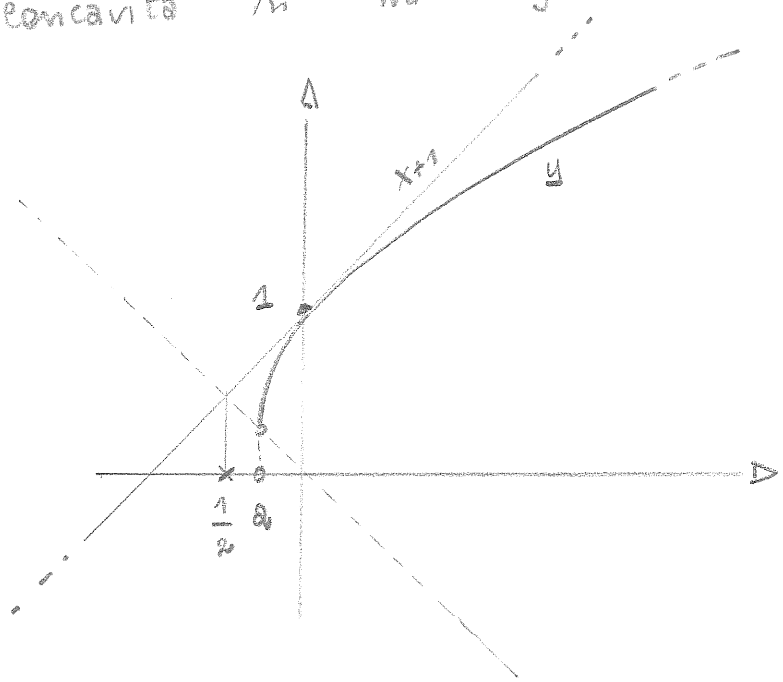
$$y'' = -\frac{1+y'}{(x+y)^2} = -\frac{1+\frac{1}{x+y}}{(x+y)^2} < 0$$

e quindi $y$ è concava.

La retta tangente al grafico di $y$ nel punto $x=0$ è

$$\varphi(x) = x+1,$$

e per la concavità si ha $y(x) \leq x+1$, $\forall x \in (a,b)$.




Dalla stima $y(x) \leq x+1$ e dal criterio di Prolungamento deduciamo che $b = \infty$. Dal disegno vediamo che $a > -\frac{1}{2}$.

Chiaramente $\lim_{x \to a^-} y'(x) = +\infty$.

Per $x \geq 0$ si ha $y(x) \geq 1$ e quindi

$$y'(x) = \frac{1}{x + y(x)} \leq \frac{1}{x+1} \quad , \quad x \geq 0.$$

Integrando

$$y(x) = y(0) + \int_0^x y'(t)\,dt$$

$$\leq 1 + \int_0^x \frac{1}{t+1}\,dt = 1 + \log(1+x)$$

In modo analogo, usando $y(x) \leq x+1$ :

$$y(x) \geq 1 + \int_0^x \frac{1}{2t+1}\,dt = 1 + \left[\frac{1}{2}\log(2t+1)\right]_{t=0}^{t=x}$$

$$\geq 1 + \frac{1}{2}\log(2x+1).$$

Deduciamo che

$$\lim_{x \to \infty} y(x) = \infty.$$

Per il Teorema di Hôpital

$$\lim_{x \to \infty} \frac{y(x)}{\log x} = \lim_{x \to \infty} \frac{y'(x)}{1/x} =$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{x}{y(x)+x} = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{\frac{y(x)}{x}+1} = 1$$

Infatti

$$0 < \frac{y(x)}{x} \leq \frac{1+\log(x+1)}{x} \xrightarrow[x \to \infty]{} 0 .$$

Ora calcoliamo la soluzione in un modo ragionevolmente esplicito. Sia $z(x) = x + y(x)$. Allora $z' = 1+y'$ e $z$ risolve il Problema di Cauchy

$$\begin{cases} z' = 1 + \frac{1}{z} \\ z(0) = 1 . \end{cases}$$

L'equazione è a variabili separabili: $\frac{z z'}{1+z} = 1$

Integriamo

$$x = \int_0^x \frac{z z'}{1+z} \, dt = \int_0^x \left(1 - \frac{1}{1+z}\right) z' \, dt =$$

$$= \Big[ z - \log(1+z) \Big]_{t=0}^{t=x} = z(x) - \log(1+z(x)) - z(0) + \log(1+z(0))$$

$$= z - \log(1+z) - 1 + \log 2 ,$$

Tornando alla soluzione $y$: $x = x+y - \log(1+x+y) - 1 + \log 2$

Ovvero:

$$y = \log(1+x+y) + 1 - \log 2$$

da cui

$$x = 2e^{y-1} - y - 1 = \psi(y) .$$

Abbiamo calcolato esplicitamente la funzione inversa della soluzione. Osserviamo che

$$\psi'(y) = 2e^{y-1} - 1$$

e quindi $\psi'(y) = 0 \iff e^{y-1} = \frac{1}{2} \iff y = 1 + \log\left(\frac{1}{2}\right)$.

Il valore corrispondente della $x$ è

$$x = 2 \cdot \frac{1}{2} - \left(1 + \log\left(\frac{1}{2}\right)\right) - 1 = \log 2 - 1.$$