

Analisi Matematica 2 - A

Nome:

Appello scritto del 18 Febbraio 2013

Esercizio 1 (10 punti) Studiare la convergenza uniforme della successione di funzioni

$$f_n(x) = 2^n x (1 - \sqrt[n]{|x|})^n, \quad x \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Esercizio 2 (10 punti) Sia $g \in C(\mathbb{R})$ una funzione continua fissata. Provare che l'equazione funzionale

$$(1 + x^2)\varphi(x) + x \sin(\varphi(x)) = g(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

ha un'unica soluzione continua $\varphi \in C(\mathbb{R})$. Assumendo che $g \in C^1(\mathbb{R})$, provare che $\varphi \in C^1(\mathbb{R})$.

Esercizio 3 (10 punti) Si consideri il Problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \frac{1}{x+y} \\ y(0) = 1, \end{cases}$$

dove y è la funzione incognita ed x è la sua variabile.

- 1) Provare che il problema ha un'unica soluzione locale, che è crescente e concava. Trattare il grafico.
- 2) Sia $(a, b) \subset \mathbb{R}$ l'intervallo di definizione della soluzione massimale. Provare che $b = \infty$ e che $a > -1/2$.
- 3) Calcolare il limite

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y(x)}{\log x}.$$

- 4) (facoltativo) Calcolare il valore di a .

Tempo a disposizione: 2.30 ore.