

Analisi Matematica 2 - A

Nome:

Appello scritto del 9 Settembre 2013

Esercizio 1 (10 punti) Si consideri il Problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \sin(y + x) \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

- i) Provare che il problema ha un'unica soluzione definita su tutto $(-\infty, \infty)$.
- ii) Determinare tutte le soluzioni dell'equazione differenziale $y' = \sin(y + x)$ della forma $y = mx + q$ con $m, q \in \mathbb{R}$.
- iii) Studiare la monotonia della soluzione del Problema di Cauchy e disegnarne un grafico qualitativo.
- iv) Calcolare eventuali asintoti della soluzione.

Esercizio 2 (10 punti) Studiare la convergenza puntuale e uniforme della successione di funzioni $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ così definite:

$$f_n(x) = \frac{1}{n} \log(x^{2n} + n^{2x}), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Esercizio 3 (10 punti) Siano $f, g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ funzioni tali che $f(0) = g(0) = 0$ e, per $x^2 + y^2 \neq 0$,

$$f(x, y) = \frac{y|x|^\alpha}{x^4 + y^2}, \quad g(x, y) = y \sin\left(\frac{|x|^\beta}{x^2 + y^4}\right),$$

dove $\alpha > 0$ e $\beta > 0$ sono parametri.

- 1) Calcolare tutti gli α tali che f sia differenziabile in $0 \in \mathbb{R}^2$.
- 2) Calcolare tutti i β tali che g sia differenziabile in $0 \in \mathbb{R}^2$.
- 3) (Facoltativo) Calcolare tutti i $\gamma > 0$ tali che

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \sin\left(\frac{|x|^\gamma}{x^4 + y^2}\right) = 0.$$

Tempo a disposizione: 2.30 ore.