Analisi Matematica 2 - A

Soluzione — Appello scritto del 5 Luglio 2013

Esercizio 1 Sia $\alpha > 0$ un parametro fissato e si consideri la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita nel seguente modo

$$f(x,y) = \begin{cases} |y|^\alpha \sin\left(\dfrac{x}{y}\right), & y \neq 0, \\ 0 & y = 0. \end{cases}$$

Calcolare tutti gli $\alpha > 0$ tali che:

i) f sia differenziabile su tutto $\mathbb{R}^2$;

ii) le derivate parziali di f siano continue nel punto $0 \in \mathbb{R}^2$.

iii) f sia di classe $C^1(\mathbb{R}^2)$.

Soluzione. i) Quando $\alpha \leq 1$, la funzione $y \mapsto |y|^\alpha$ non è derivabile nel punto $y = 0$. Dunque, per $\alpha \leq 1$ la funzione f non è differenziabile su tutto $\mathbb{R}^2$ in quanto non ha la derivata parziale in y nei punti in cui $y = 0$ e $x \neq 0$.
Nell'insieme in cui $y \neq 0$, la funzione f è di classe C^∞, essendo prodotto e composizione di funzioni C^∞. In questo insieme f è differenziabile.
Affermiamo che, per $\alpha > 1$, f è differenziabile anche nei punti $(x_0, 0) \in \mathbb{R}^2$ per ogni $x_0 \in \mathbb{R}$. In questi punti, le derivate parziali di f sono

$$\begin{aligned} &f_x(x_0,0) = 0, \\ &f_y(x_0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{f(x_0,y) - f(x_0,0)}{y} = \lim_{y\to 0} \frac{|y|^\alpha}{y} \sin\left(\frac{x_0}{y}\right) = 0. \end{aligned}$$

Proviamo che f è differenziabile nel generico punto $(x_0, 0)$:

$$\left| \frac{f(x,y) - f(x_0,0) - \langle \nabla f(x_0,0), (x - x_0, y)\rangle}{\sqrt{(x-x_0)^2 + y^2}} \right| = \frac{|y|^\alpha}{\sqrt{(x-x_0)^2+y^2}} \left| \sin\left(\frac{x}{y}\right)\right| \leq |y|^{\alpha-1},$$

e la funzione a destra tende a 0 per $y \to 0$ (indipendentemente da x).
Conclusione: f è differenziabile su tutto $\mathbb{R}^2$ se e solo se $\alpha > 1$.

ii) Per il punto precedente, possiamo restringerci al caso $\alpha > 1$. Calcoliamo le derivate parziali di f nei punti in cui $y \neq 0$:

$$\begin{aligned} &f_x(x,y) = \frac{|y|^\alpha}{y} \cos\left(\frac{x}{y}\right), \\ &f_y(x,y) = \alpha |y|^{\alpha-2} y \sin\left(\frac{x}{y}\right) - \frac{|y|^\alpha x}{y^2} \cos\left(\frac{x}{y}\right). \end{aligned}$$

Chiaramente si ha

$$\left|\frac{|y|^\alpha}{y}\cos\left(\frac{x}{y}\right)\right| \le |y|^{\alpha-1},$$
$$\left|\alpha|y|^{\alpha-2}y\sin\left(\frac{x}{y}\right)\right| \le \alpha|y|^{\alpha-1},$$

e le quantità a destra tendono a 0 per $y \to 0$ (indipendentemente da x). Esaminiamo il secondo addendo che appare in $f_y(x,y)$:

$$\left|\frac{|y|^\alpha x}{y^2}\cos\left(\frac{x}{y}\right)\right| \le |y|^{\alpha-2}|x|.$$

Quando $\alpha \ge 2$ (incluso il caso $\alpha = 2$), si ha

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} |y|^{\alpha-2}|x| = 0.$$

D'altra parte, quando $\alpha < 2$ il seguente limite non esiste:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|y|^\alpha x}{y^2}\cos\left(\frac{x}{y}\right).$$

Per vedere questo fatto scegliamo $0 < \varepsilon < 2-\alpha$ e $x = |y|^\varepsilon$. Si ha allora

$$|y|^{\alpha-2}|x| = |y|^{\alpha-2+\varepsilon} \to \infty \quad \text{per} \quad y \to 0,$$

mentre la funzione $\cos(x/y) = \cos(|y|^\varepsilon/y)$ non ha limite per $y \to 0$.
Conclusione: le derivate parziali di f sono continue in 0 se e solo se $\alpha \ge 2$.

iii) Rimane da controllare la continuità delle derivate parziali nei punti $(x_0, 0) \in \mathbb{R}^2$, con $x_0 \ne 0$. Quando $\alpha > 2$ si ha

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,0)} |y|^{\alpha-2}|x| = 0.$$

Quando $\alpha = 2$, invece, il seguente limite non esiste:

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,0)} \frac{|y|^\alpha x}{y^2}\cos\left(\frac{x}{y}\right).$$

Conclusione: le derivate parziali di f sono continue su tutto $\mathbb{R}^2$ se e solo se $\alpha > 2$.

Esercizio 2 Si consideri il Problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = y^2 + x^2 - 1 \\ y(0) = 0, \end{cases}$$

dove y è la funzione incognita ed x è la sua variabile.

i) Provare che il problema ha un'unica soluzione locale.

ii) Discutere eventuali simmetrie.

iii) Studiare qualitativamente la monotonia delle soluzione y.

iv) Sia $(-b, b) \subset \mathbb{R}$, con $0 < b \leq \infty$, l'intervallo di definizione della soluzione massimale. Provare che $b < \infty$.

v) (facoltativo) Provare che $b > \sqrt{3/2}$.

Soluzione. i) La funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^2 + y^2 - 1$, è di classe C^∞ e dunque è localmente Lipschitziana. Dunque, il Problema di Cauchy ha una soluzione locale unica $y \in C^1(-\delta, \delta)$ per qualche $\delta > 0$. La soluzione è in effetti di classe C^∞.

ii) Proviamo che la soluzione y è una funzione dispari. Consideriamo la funzione ausiliaria $z(x) = -y(-x)$, $x \in (-\delta, \delta)$. Si ha

$$z'(x) = y'(-x) = y(-x)^2 + (-x)^2 - 1 = z(x)^2 + x^2 - 1, \quad x \in (-\delta, \delta),$$

ed inoltre $z(0) = -y(0) = 0$. Dunque, z è soluzione del Problema di Cauchy. Per l'unicità della soluzione deve essere $z = y$ e quindi y è una funzione dispari.

iii) Dentro il cerchio $x^2 + y^2 < 1$, la funzione f è negativa. Dunque, quando il grafico della soluzione y si trova dentro il cerchio, la soluzione è strettamente decrescente. Siccome il punto iniziale $(0, y(0)) = (0, 0)$ è proprio il centro del cerchio, la soluzione è certamente decrescente in un intorno di $x = 0$. Fuori dal cerchio, la soluzione è crescente.
Il grafico della soluzione y deve intersecare la circonferenza $x^2 + y^2 = 1$. In questi punti si ha $y' = 0$. Una volta lasciato il cerchio, il grafico della soluzione non può più rientrarvi.
Dunque esiste un punto $\bar{x} \in (0, 1)$ tale che y è strettamente decrescente nell'intervallo $(-\bar{x}, \bar{x})$, è crescente per $x > \bar{x}$ (fintantochè la soluzione è definita), ed è crescente nell'intervallo a sinistra di $-\bar{x}$.
Dalla precedente discussione segue anche che la funzione è certamente definita su tutto l'intervallo $(-1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon)$ per qualche $\varepsilon > 0$.

iv) Per la discussione precedente, esiste (unico) un punto $x_0 \in (1, b)$ tale che $y(x_0) = 0$. Definiamo il numero $\beta = \sqrt{x_0^2 - 1} > 0$. Avremo allora, per $x \geq x_0$,

$$y'(x) \geq y(x)^2 + \beta^2,$$

dividendo ed integrando sull'intervallo (x_0, x) con il dato iniziale $y(x_0) = 0$ si ottiene

$$\int_{x_0}^{x} \frac{y'}{y^2 + \beta^2} dt \geq x - x_0.$$

Il calcolo dell'integrale è immediato e si ottiene

$$\operatorname{arctg}\Big(\frac{y(x)}{\beta}\Big) \geq \beta(x - x_0),$$

e quindi si trova $y(x) \geq \beta \operatorname{tg}\big(\beta(x - x_0)\big)$. Per confronto si ottiene la stima $\beta(b - x_0) < \pi/2$, e dunque, in particolare, $b < \infty$.

v) In primo luogo osserviamo che $y' = y^2 + x^2 - 1 \geq -1$ e integrando su $(0, x)$ si trova $y(x) \geq -x$, per ogni $x \in [0, b)$. Quando $y(x) \leq 0$, la disuguaglianza $y(x) \geq -x$ è equivalente a $y(x)^2 \leq x^2$. Di conseguenza, per ogni $x \geq 0$ tale che $y(x) \leq 0$, si ha

$$y'(x) \leq 2x^2 - 1.$$

L'insieme di tali x forma un intervallo. Integrando su $[0, x]$ la disuguaglianza precedente si ottiene

$$y(x) \leq \int_0^x (2t^2 - 1)dt = \frac{2}{3}x^3 - x.$$

Per confronto, deduciamo che deve necessariamente essere $b > \sqrt{3/2}$.

Esercizio 3 (10 punti) Studiare la convergenza puntuale e uniforme della seguente serie di funzioni:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1 + n^2 x)\mathrm{e}^{-nx}}{1 + n^2}, \quad x \geq 0.$$

Soluzione. Osserviamo preliminarmente che

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1 + n^2 x)\mathrm{e}^{-nx}}{1 + n^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{-nx}}{1 + n^2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2 x \mathrm{e}^{-nx}}{1 + n^2},$$

e che per $x \geq 0$ si ha

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{-nx}}{1 + n^2} \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1 + n^2} < \infty.$$

Per il Criterio di Weierstrass la serie a sinistra converge uniformemente su $[0, \infty)$.
È dunque sufficiente studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2 x \mathrm{e}^{-nx}}{1 + n^2} = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x), \quad x \geq 0. \tag{*}$$

Per $x = 0$ la serie converge a 0 in quanto il termine generale è 0 per ogni $n \in \mathbb{N}$.
Studiamo brevemente le funzioni $f_n(x) \geq 0$, per $x \geq 0$. La derivata è:

$$f_n'(x) = \frac{n^2 \mathrm{e}^{-nx}}{1 + n^2}(1 - nx).$$

Dunque, la funzione f_n cresce su $[0, 1/n]$ e decresce su $[1/n, \infty)$. Deduciamo che, fissato $\delta > 0$, per ogni $n \geq 1/\delta$ si ha

$$\sup_{x \geq \delta} f_n(x) = f_n(\delta).$$

Siccome la seguente serie converge

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(\delta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 \delta \mathrm{e}^{-n\delta}}{1+n^2} \leq \sum_{n=0}^{\infty} \delta \mathrm{e}^{-n\delta} = \frac{\delta}{1-\mathrm{e}^{-\delta}} < \infty,$$

deduciamo dal Criterio di Weierstrass che la serie $(*)$ converge uniformemente su $[\delta, \infty)$, per ogni $\delta > 0$.

Proviamo che non c'è convergenza uniforme su $[0, \infty)$. Osserviamo che

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 x \mathrm{e}^{-nx}}{1+n^2} \geq \frac{x}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{e}^{-nx} = \frac{x}{2} \frac{\mathrm{e}^{-x}}{1-\mathrm{e}^{-x}}.$$

Siccome

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{x}{2} \frac{\mathrm{e}^{-x}}{1-\mathrm{e}^{-x}} = \frac{1}{2} \neq 0,$$

deduciamo che la serie $(*)$ definisce una funzione su $[0, \infty)$ che vale 0 per $x = 0$ e che non è continua in $x = 0$. Siccome la convergenza uniforme preserva la continuità, concludiamo che la serie $(*)$ non converge uniformemente su $[0, \infty)$, e dunque nemmeno la serie iniziale.