Analisi Matematica 2 - A

Soluzione — Appello scritto del 29 Gennaio 2013

Esercizio 1 (10 punti) Si consideri il Problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = |y| + x \\ y(0) = 0, \end{cases}$$

dove y è la funzione incognita ed x è la sua variabile.

1) Provare che esiste un'unica soluzione $y \in C^1(\mathbb{R})$ del problema e studiarne la monotonia.

2) Calcolare la soluzione.

Soluzione. 1) La funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = |y|+x$, è continua e verifica la condizione di Lipschitz $|f(x, y_1)-f(x, y_2)| = \big||y_1|-|y_2|\big| \le |y_1-y_2|$ per ogni $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$. Per il Teorema di esistenza e unicità locale esiste unica la soluzione $y \in C^1(-\delta, \delta)$ del Problema di Cauchy, per qualche $\delta > 0$.
Fissato $M > 0$, per ogni $|x| \le M$ si ha

$$|f(x, y)| \le |y| + |x| \le |y| + M, \quad y \in \mathbb{R},$$

e dunque f verifica le ipotesi del teorema di esistenza globale della soluzione. Dunque la soluzione massimale del Problema di Cauchy è definita su tutto $\mathbb{R}$.
La disequazione $f(x, y) > 0$ è verificata se e solo se $x > -|y|$. Dunque, nella regione $C = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > -|y|\big\}$ la soluzione y è crescente. Siccome $(x, y(x)) \in C$ per $x > 0$, deduciamo che la soluzione y è crescente su tutta la semiretta $[0, \infty)$. Siccome $y(0) = 0$ e $y'(0) = 0$, si ha $(x, y(x)) \in D = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) < 0\big\}$ per ogni $x \in (-\delta, 0)$, per qualche $\delta > 0$. Infatti, essendo $y \in C^1(\mathbb{R})$, si ha lo sviluppo $y(x) = y(0) + y'(0)x + o(x) = o(x)$ per $x \to 0$ e quindi $|y(x)| < |x|$ per $x \in (-\delta, 0)$. Affermiamo che in realtà $(x, y(x)) \in D$ per ogni $x < 0$. Se, infatti, per assurdo fosse $f(\bar{x}, y(\bar{x})) = 0$ per qualche $\bar{x} < 0$, allora si avrebbe $y'(\bar{x}) = 0$ e $y'(x) > 0$ per $x > \bar{x}$ e quindi y sarebbe strettamente crescente per $x > \bar{x}$. Questo non è compatibile con $y(0) = 0$.
La conclusione è che y è decrescente su $(-\infty, 0]$ ed è crescente su $[0, \infty)$. Siccome $y(0) = 0$ deduciamo che $y(x) \ge 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

2) Essendo $y \ge 0$, dobbiamo risolvere il Problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = y + x \\ y(0) = 0, \end{cases}$$

L'equazione differenziale è lineare del primo ordine. L'integrale generale dell'equazione omogenea $y' = y$ è $y(x) = C\mathrm{e}^x$. Con la variazione della costante $C = C(x)$ si trova l'equazione $C'(x) = x\mathrm{e}^{-x}$, e dunque dopo un'integrazione per parti si trova $C(x) = C_0 - (x+1)\mathrm{e}^{-x}$, dove $C_0 \in \mathbb{R}$ è una costante. La soluzione generale dell'equazione differenziale è

$$y(x) = C_0\mathrm{e}^x - (x+1), \quad x \in \mathbb{R},$$

ed imponendo la condizione iniziale $y(0) = 0$ si determina $C_0 = 1$. Osserviamo che la soluzione $y(x) = \mathrm{e}^x - (x+1)$, $x \in \mathbb{R}$, è effettivamente sempre positiva: $\mathrm{e}^x \geq x+1$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, essendo la funzione esponenziale convessa ed $x+1$ la sua retta tangente in $x = 0$.

Esercizio 2 (10 punti) Si consideri la successione di funzioni $f_n = g_n h_n$, $n \in \mathbb{N}$, dove

$$g_n(x) = \mathrm{arctg}(nx) \quad \text{e} \quad h_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

1) Calcolare il limite puntuale

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

2) Studiare la convergenza uniforme delle successioni $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

3) Provare che la successione $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente su $\mathbb{R}$.

Soluzione. 1) Osserviamo che

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{arctg}(nx) = \frac{\pi}{2}\mathrm{sgn}(x), \quad \lim_{n\to\infty} \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} = |x|, \quad x \in \mathbb{R},$$

e quindi

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \frac{\pi}{2}x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

2) Chiaramente, per ogni $x \in \mathbb{R}$ si ha

$$\left| \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} - |x| \right| = \left| \frac{1/n}{\sqrt{x^2 + 1/n} + |x|} \right| \leq \sqrt{\frac{1}{n}},$$

e quindi c'è la convergenza uniforme

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}} \left| \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} - |x| \right| = 0.$$

Inoltre, fissato $\delta > 0$, dalle proprietà elementari di monotonia della funzione arcotangente segue che per ogni $|x| \geq \delta$ si ha

$$|\mathrm{arctg}(nx) - \pi/2| \leq \pi/2 - \mathrm{arctg}(n\delta),$$

e quindi

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{|x|\geq\delta} |\mathrm{arctg}(nx) - \pi/2| = 0.$$

La successione $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ non converge uniformemente in alcun intorno di $x = 0$ in quanto il suo limite puntuale è una funzione discontinua in $x = 0$.

3) Intanto osserviamo che, dette g ed h le funzioni limite di $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ed $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$, abbiamo

$$|f_n(x) - f(x)| \leq |g_n(x)h_n(x) - g_n(x)h(x)| + |g_n(x)h(x) - g(x)h(x)|,$$

e dunque fissati $0 < \delta < M < \infty$ si ha

$$\begin{aligned}\sup_{\delta\leq x\leq M} |f_n(x) - f(x)| &\leq \frac{\pi}{2} \sup_{\delta\leq x\leq M} |h_n(x) - h(x)| + \sup_{\delta\leq x\leq M} |xg_n(x) - xg(x)| \\ &\leq \frac{\pi}{2\sqrt{n}} + M \sup_{\delta\leq x\leq M} |g_n(x) - g(x)|,\end{aligned}$$

e quindi si ha convergenza uniforme su ogni intervallo $[\delta, M]$, per i fatti stabiliti al punto precedente. La stima del primo pezzo è indipendente da δ ed M.

Per migliorare la stima precedente si può argomentare nel seguente modo. Questa è la parte difficile del compito. È sufficiente mostrare la convergenza uniforme per $x > 0$. Precisamente, affermiamo che

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x>0} \left| \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}\mathrm{arctg}(nx) - \frac{\pi}{2}x \right| = 0.$$

Dalla proprietà della funzione arcotangente

$$\mathrm{arctg}(t) + \mathrm{arctg}\Big(\frac{1}{t}\Big) = \frac{\pi}{2}, \quad t > 0,$$

si ottiene

$$\sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}\mathrm{arctg}(nx) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}\Big(\frac{\pi}{2} - \mathrm{arctg}\Big(\frac{1}{nx}\Big)\Big).$$

Dal punto 2) sappiamo che

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x>0} \left| \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} - x \right| = 0.$$

D'altra parte, usando $\mathrm{arctg}(t) \leq t$ per $t > 0$, si ha per ogni $x > 0$

$$\sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}\mathrm{arctg}\Big(\frac{1}{nx}\Big) \leq \Big(x + \frac{1}{\sqrt{n}}\Big)\mathrm{arctg}\Big(\frac{1}{nx}\Big) \leq \frac{1}{n} + \frac{\pi}{2\sqrt{n}},$$

e dunque

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x>0} \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}\mathrm{arctg}\Big(\frac{1}{nx}\Big) = 0.$$

Esercizio 3 (10 punti) Siano $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ funzioni tali che $f(0) = g(0) = 0$ e, per $x^2 + y^2 \neq 0$,

$$f(x,y) = x \sin\left(\frac{|y|^\alpha}{x^4 + y^2}\right), \quad g(x,y) = \frac{x|y|^\beta}{x^2 + y^4},$$

dove $\alpha > 0$ e $\beta > 0$ sono parametri.

1) Calcolare tutti gli α tali che f sia differenziabile in $0 \in \mathbb{R}^2$.

2) Calcolare tutti i β tali che g sia differenziabile in $0 \in \mathbb{R}^2$.

3) (Facoltativo) Calcolare tutti i $\gamma > 0$ tali che

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \sin\left(\frac{|y|^\gamma}{x^2 + y^4}\right) = 0. \tag{L}$$

Soluzione. Le derivate parziali di f e g in 0 sono

$$f_x(0) = f_y(0) = 0, \quad g_x(0) = g_y(0) = 0.$$

1) Dobbiamo determinare tutti gli $\alpha > 0$ tali che

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \sin\left(\frac{|y|^\alpha}{x^4 + y^2}\right) = 0. \tag{$*$}$$

Usando la disuguaglianza $|\sin(t)| \leq |t|$ si ottiene

$$\left|\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \sin\left(\frac{|y|^\alpha}{x^4 + y^2}\right)\right| \leq \frac{|y|^\alpha}{x^4 + y^2} \leq |y|^{\alpha-2}.$$

Dunque, per confronto, quando $\alpha > 2$ il limite $(*)$ è 0 e la funzione f è differenziabile in 0. Supponiamo ora che $\alpha \leq 2$. Con la scelta $x = y > 0$ si trova

$$\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \sin\left(\frac{|y|^\alpha}{x^4 + y^2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin\left(\frac{x^{\alpha-2}}{x^2 + 1}\right) = \varphi(x),$$

e, per $\alpha \leq 2$, $\varphi(x)$ non tende a 0 per $x \to 0^+$. Quindi, per $\alpha \leq 2$ la funzione f non è differenziabile in 0.

2) Dobbiamo determinare tutti i $\beta > 0$ tali che

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x|y|^\beta}{\sqrt{x^2 + y^2}(x^2 + y^4)} = 0. \tag{$**$}$$

Maggioriamo la funzione nel seguente modo:

$$\left|\frac{x|y|^\beta}{\sqrt{x^2 + y^2}(x^2 + y^4)}\right| \leq \frac{|x||y|^{\beta-1}}{x^2 + y^4}.$$

Con la sostituzione $y^2 = z$ prima e con le coordinate polari $x = r\cos(\vartheta)$ e $z = r\sin(\vartheta)$ poi, si trova

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|x||y|^{\beta-1}}{x^2+y^4} = \lim_{(x,z)\to(0,0)} \frac{|x||z|^{(\beta-1)/2}}{x^2+z^2} = \lim_{r\to 0^+} r^{(\beta-1)/2-1}|\sin\vartheta|^{(\beta-1)/2},$$

e quando $\beta > 3$ l'ultimo limite è 0 (uniformemente in ϑ). Dunque, per $\beta > 3$ la funzione g è differenziabile in 0.

Supponiamo ora che sia $\beta \le 3$. Esaminiamo il limite $(**)$ con la restrizione $x = y^2$ ed $y > 0$. Avremo

$$\frac{x|y|^\beta}{\sqrt{x^2+y^2}(x^2+y^4)} = \frac{y^{\beta-3}}{2\sqrt{y^2+1}},$$

e quando $\beta \le 3$ l'ultima funzione non converge a 0 per $y \to 0^+$. Quindi per $\beta \le 3$ la funzione g non è differenziabile in 0.

3) Dalla discussione del punto 2) e dalla maggiorazione

$$\left|\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\sin\Big(\frac{|y|^\gamma}{x^2+y^4}\Big)\right| \le \frac{|x||y|^\gamma}{\sqrt{x^2+y^2}(x^2+y^4)}$$

si deduce che il limite (L) è 0 per $\gamma > 3$. Vogliamo mostrare che in realtà il limite è 0 se e solo se $\gamma > 2$.

Fissiamo un numero $0 < \sigma < 1$ da determinare in seguito in dipendenza da $\gamma > 2$. Prendiamo un punto $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ in un intorno dell'origine e distinguiamo due casi: i) $|x| \le |y|^{1+\sigma}$; ii) $|x| \ge |y|^{1+\sigma}$. Fissiamo $\varepsilon > 0$. Nel caso i) abbiamo la stima

$$\left|\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\sin\Big(\frac{|y|^\gamma}{x^2+y^4}\Big)\right| \le \frac{|x|}{\sqrt{x^2+y^2}} \le |y|^\sigma < \varepsilon$$

se e solo se $|y| < \varepsilon^{1/\sigma}$. Nel caso ii) abbiamo $x^2 \ge |y|^{2(1+\sigma)}$ e quindi

$$\left|\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\sin\Big(\frac{|y|^\gamma}{x^2+y^4}\Big)\right| \le \frac{|y|^\gamma}{x^2+y^4} \le \frac{|y|^\gamma}{|y|^{2(1+\sigma)}} = |y|^{\gamma-2(1+\sigma)} < \varepsilon$$

se e solo $|y| < \varepsilon^{1/\lambda}$, dove si ha $\lambda = \gamma - 2(1+\sigma) > 0$ su scelta opportuna di

$$\sigma \in \Big(0, \frac{\gamma}{2} - 1\Big).$$

Questa scelta è possibile perchè $\gamma > 2$. Ciò prova che il limite (L) è 0 quando $\gamma > 2$.

Per $\gamma \le 2$ il limite non è 0. Per provare questo fatto basta esaminare il limite (L) con la restrizione $x = y$.