Analisi Matematica 2 - A

Nome: Appello scritto del 16 Luglio 2013

Esercizio 1 (10 punti) Si consideri il Problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \sin(y+x) \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

i) Provare che il problema ha un'unica soluzione definita su tutto $(-\infty, \infty)$.

ii) Determinare tutte le soluzioni dell'equazione differenziale $y' = \sin(y+x)$ della forma $y = mx + q$ con $m, q \in \mathbb{R}$.

iii) Studiare la monotonia della soluzione del Problema di Cauchy e disegnarne un grafico qualitativo.

iv) Calcolare eventuali asintoti della soluzione.

Soluzione. i) La funzione $f(x,y) = \sin(x+y)$ è di classe $C^\infty(\mathbb{R}^2)$ e quindi localmente (in effetti globalmente) Lipschitziana. Per il Teorema di esistenza e unicità locale esiste un'unica soluzione locale. Inoltre si ha $|f(x,y)| \leq 1$ e quindi per il Teorema di esistenza globale con crescita sub-lineare la soluzione è definita su tutto $(-\infty, \infty)$.

ii) Se $y = mx + q$ è una soluzione allora

$$m = y' = \sin(y+x) = \sin(mx+q+x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Deduciamo che deve essere $m = -1$ e $\sin q = -1$, ovvero $q = 3\pi/2 + 2k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$.

iii) Per il Teorema di unicità, la soluzione y non può intersecare le rette $y = -x - \pi/2$ e $y = -x + 3\pi/2$. Dunque deve essere

$$-x - \frac{\pi}{2} < y(x) < -x + \frac{3}{2}\pi, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Fatta questa premessa, studiamo la monotonia della soluzione. Possiamo limitarci alla regione (striscia) delimitata dalle due rette precedenti. La soluzione y è crescente nella regione dove

$$\sin(y+x) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad 0 < y+x < \pi.$$

La soluzione y è decrescente nella regione dove

$$\sin(y+x) < 0 \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{\pi}{2} < y+x < 0 \quad \text{oppure} \quad \pi < y+x < \frac{3}{2}\pi.$$

In conclusione, esiste $x^* \in (0, \pi)$ tale che:
– y decresce su $(-\infty, 0)$;
– y cresce su $(0, x^*)$;
– y decresce su (x^*, ∞).

iv) Proviamo che $y = -x + \frac{3}{2}\pi$ è un asintoto a ∞. Dividiamo per $x > 0$ la disuguaglianza

$$-x - \frac{\pi}{2} < y(x) < -x + \frac{3}{2}\pi,$$

e otteniamo

$$-1 - \frac{\pi}{2x} < \frac{y(x)}{x} < -1 + \frac{3\pi}{2x}.$$

Per confronto si ottiene

$$\lim_{x\to\infty} \frac{y(x)}{x} = -1.$$

Affermiamo che

$$\lim_{x\to\infty} y(x) + x = \frac{3}{2}\pi.$$

La funzione $z(x) = y(x) + x$ risolve

$$z' = y' + 1 = \sin(y + x) + 1 = \sin(z) + 1 \geq 0.$$

Dunque, z è crescente e pertanto esiste il limite

$$L = \lim_{x\to\infty} y(x) + x = \lim_{x\to\infty} z(x) \leq \frac{3}{2}\pi,$$

infatti $y(x) + x < 3\pi/2$. Se per assurdo fosse $L < 3\pi/2$:

$$\lim_{x\to\infty} z'(x) = \lim_{x\to\infty} \sin(z(x)) + 1 = \sin(L) + 1 > 0.$$

Questo implicherebbe che $\lim\limits_{x\to\infty} z(x) = \infty$. Questo è assurdo.
In modo analogo si prova che $y = -x - \pi/2$ è un asintoto a $-\infty$.

Esercizio 2 (10 punti) Studiare la convergenza puntuale e uniforme della successione di funzioni $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ così definite:

$$f_n(x) = \frac{1}{n} \log\left(x^{2n} + n^{2x}\right), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Soluzione. Quando $-1 \le x \le 1$ si ha

$$-\frac{2\log n}{n} \le \frac{\log n^{2x}}{n} \le \frac{\log(x^{2n}+n^{2x})}{n} \le \frac{\log(1+n^2)}{n},$$

e per confronto si deduce che si ha convergenza puntuale a 0:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0, \quad -1 \le x \le 1.$$

Di più, si ha la convergenza uniforme:

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{-1\le x\le 1} |f_n(x)| = 0.$$

Studiamo la convegenza puntuale per $x^2 > 1$. Riscriviamo la funzione nel seguente modo:

$$f_n(x) = \log x^2 + \frac{1}{n}\log\Big(1+\frac{n^{2x}}{x^{2n}}\Big).$$

Siccome

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^{2x}}{x^{2n}} = 0 \quad \text{per } x^2 > 1,$$

deduciamo che

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \log x^2, \quad x^2 > 1.$$

In definitiva, il limite puntuale è

$$f_\infty(x) = \begin{cases} 0 & \text{per } x^2 \le 1 \\ \log x^2 & \text{per } x^2 > 1. \end{cases}$$

Studiamo la convergenza uniforme per $x < -1$. Consideriamo la differenza

$$g_n(x) = |f_n(x) - f_\infty(x)| = f_n(x) - f_\infty(x) \ge 0.$$

La sua derivata è

$$g_n'(x) = \frac{1}{n}\frac{2nx^{2n-1} + 2n^{2x}\log n}{x^{2n}+n^{2x}} - \frac{2}{x} = \frac{2n^{2x}(x\log n - n)}{nx(x^{2n}+n^{2x})}.$$

Chiaramente, per $x < -1$ si ha $g_n'(x) \ge 0$ e di conseguenza

$$\sup_{x\le -1} |f_n(x) - f_\infty(x)| = f_n(-1) - f_\infty(-1) = f_n(-1) \to 0, \quad n \to \infty.$$

Si ha dunque convergenza uniforme su $(-\infty, -1]$.

Studiamo la convergenza uniforme su $1 < x \leq M$, dove $M > 1$ è arbitrario. Definitivamente (per tutti gli n sufficientemente grandi) si ha $g_n'(x) < 0$ per $1 \leq x \leq M$ (infatti $x \log n - n \leq M logn - n < 0$ definitivamente). Di conseguenza

$$\sup_{1 \leq x \leq M} |f_n(x) - f_\infty(x)| = f_n(1) - f_\infty(1) = f_n(1) \to 0, \quad n \to \infty.$$

In conclusione, si ha convergenza uniforme su $[1, M]$ per ogni $M > 1$. Non si ha invece convergenza uniforme su $[1, \infty)$, in quanto

$$\lim_{x \to \infty} f_n(x) - f_\infty(x) = \infty$$

per ogni $n \geq 1$.

Esercizio 3 (10 punti) Siano $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ funzioni tali che $f(0) = g(0) = 0$ e, per $x^2 + y^2 \neq 0$,

$$f(x, y) = \frac{y|x|^\alpha}{x^4 + y^2}, \quad g(x, y) = y \sin\left(\frac{|x|^\beta}{x^2 + y^4}\right),$$

dove $\alpha > 0$ e $\beta > 0$ sono parametri.

1) Calcolare tutti gli α tali che f sia differenziabile in $0 \in \mathbb{R}^2$.

2) Calcolare tutti i β tali che g sia differenziabile in $0 \in \mathbb{R}^2$.

3) (Facoltativo) Calcolare tutti i $\gamma > 0$ tali che

$$\lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \sin\left(\frac{|x|^\gamma}{x^4 + y^2}\right) = 0.$$

Tempo a disposizione: 2.30 ore.