Analisi Matematica 2 - A

Soluzione | Appello scritto del 16 Luglio 2013

Esercizio 1 (10 punti) Studiare la convergenza puntuale e uniforme della seguente serie di funzioni:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1+n^2x)\mathrm{e}^{-nx}}{1+n^2}, \quad x \geq 0.$$

Soluzione. Osserviamo preliminarmente che

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1+n^2x)\mathrm{e}^{-nx}}{1+n^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{-nx}}{1+n^2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2x\mathrm{e}^{-nx}}{1+n^2},$$

e che per $x \geq 0$ si ha

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{-nx}}{1+n^2} \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1+n^2} < \infty.$$

Per il Criterio di Weierstrass la serie a sinistra converge uniformemente su $[0,\infty)$.
È dunque sufficiente studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2x\mathrm{e}^{-nx}}{1+n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x), \quad x \geq 0. \tag{*}$$

Per $x = 0$ la serie converge a 0 in quanto il termine generale è 0 per ogni $n \in \mathbb{N}$.
Studiamo brevemente le funzioni $f_n(x) \geq 0$, per $x \geq 0$. La derivata è:

$$f_n'(x) = \frac{n^2\mathrm{e}^{-nx}}{1+n^2}(1-nx).$$

Dunque, la funzione f_n cresce su $[0, 1/n]$ e decresce su $[1/n, \infty)$. Deduciamo che, fissato $\delta > 0$, per ogni $n \geq 1/\delta$ si ha

$$\sup_{x\geq\delta} f_n(x) = f_n(\delta).$$

Siccome la seguente serie converge

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(\delta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2\delta\mathrm{e}^{-n\delta}}{1+n^2} \leq \sum_{n=0}^{\infty} \delta\mathrm{e}^{-n\delta} = \frac{\delta}{1-\mathrm{e}^{-\delta}} < \infty,$$

deduciamo dal Criterio di Weierstrass che la serie $(*)$ converge uniformemente su $[\delta, \infty)$, per ogni $\delta > 0$.

Proviamo che non c'è convergenza uniforme su $[0,\infty)$. Osserviamo che

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 x \mathrm{e}^{-nx}}{1+n^2} \geq \frac{x}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{e}^{-nx} = \frac{x}{2} \frac{\mathrm{e}^{-x}}{1-\mathrm{e}^{-x}}.$$

Siccome

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x}{2} \frac{\mathrm{e}^{-x}}{1-\mathrm{e}^{-x}} = \frac{1}{2} \neq 0,$$

deduciamo che la serie $(*)$ definisce una funzione su $[0,\infty)$ che vale 0 per $x=0$ e che non è continua in $x=0$. Siccome la convergenza uniforme preserva la continuità, concludiamo che la serie $(*)$ non converge uniformemente su $[0,\infty)$, e dunque nemmeno la serie iniziale.

Esercizio 2 (10 punti) In dipendenza dal parametro $\alpha \in \mathbb{R}$, si consideri la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = \mathrm{e}^{x+y} + x^2 + \alpha xy + y^2.$$

i) Determinare tutti i valori di α tali che f sia convessa su tutto $\mathbb{R}^2$.

ii) Per ciascun $\alpha \in [-2,2]$ discutere esistenza e unicità di punti di minimo di f.

Soluzione. i) Chiaramente, si ha $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$. Dobbiamo calcolare tutti i valori del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ tali che la matrice Hessiana di f sia semidefinita positiva, $Hf \geq 0$ su tutto $\mathbb{R}^2$. Le derivate parziali prime di f sono:

$$\begin{aligned} f_x &= \mathrm{e}^{x+y} + 2x + \alpha y \\ f_y &= \mathrm{e}^{x+y} + \alpha x + 2y. \end{aligned}$$

Le derivate parziali seconde di f sono:

$$\begin{aligned} f_{xx} &= \mathrm{e}^{x+y} + 2 \\ f_{yy} &= \mathrm{e}^{x+y} + 2 \\ f_{xy} &= \mathrm{e}^{x+y} + \alpha. \end{aligned}$$

La matrice Hessiana è semitefinita positiva, $Hf \geq 0$, se e solo se si ha $\mathrm{tr}(Hf) \geq 0$ e $\det(Hf) \geq 0$ su $\mathbb{R}^2$ dove

$$\begin{aligned} \mathrm{tr}(Hf) &= f_{xx} + f_{yy} = 2\mathrm{e}^{x+y} + 4 \\ \det(Hf) &= f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = (\mathrm{e}^{x+y}+2)^2 - (\mathrm{e}^{x+y}+\alpha)^2 \end{aligned}$$

sono la traccia e il determinante della matrice Hessiana. Chiaramente si ha $\mathrm{tr}(Hf) > 4$ su tutto $\mathbb{R}^2$. Studiamo la disequazione $\det(Hf) \geq 0$, ovvero $4\mathrm{e}^{x+y} + 4 - 2\alpha\mathrm{e}^{x+y} - \alpha^2 \geq 0$ che è equivalente a

$$(2-\alpha)(2\mathrm{e}^{x+y} + 2 + \alpha) \geq 0.$$

Nel caso $\alpha > 2$ questa disequazione non è verifica in alcun punto $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Nel caso $\alpha = 2$ la disuguaglianza è un'uguaglianza. Nel caso $\alpha < 2$ la disuguaglianza è verificata su tutto $\mathbb{R}^2$ se e solo se $2e^{x+y} + 2 + \alpha \geq 0$ per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, ovvero se e solo se $2 + \alpha \geq 0$. In conclusione, f è convessa su tutto $\mathbb{R}^2$ se e solo se $\alpha \in [-2, 2]$.

ii) Per i valori $\alpha \in [-2, 2]$ la funzione f è convessa, e dunque i punti di minimo coincidono con i punti critici. Cerchiamo eventuali punti critici. Le equazioni $f_x = f_y = 0$ danno il sistema

$$e^{x+y} + 2x + \alpha y = 0, \quad e^{x+y} + \alpha x + 2y = 0.$$

Sottraendo le due equazioni si ottiene $(2 - \alpha)x - (2 - \alpha)y = 0$. Quando $\alpha = 2$ questa condizione è vuota: le due equazioni precedenti diventano $e^{x+y} + 2(x+y) = 0$. L'equazione $e^t + 2t = 0$ ha una soluzione unica $t^* < 0$ (si vede con il teorema degli zeri). Dunque tutti i punti $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tali che $x + y = t^*$ sono (tutti i) punti critici di f.

Esaminiamo il caso $\alpha \neq 2$. L'equazione $(2 - \alpha)x - (2 - \alpha)y = 0$ fornisce $x = y$ e quindi si ottiene l'equazione $e^{2x} + (2 + \alpha)x = 0$. Quando $\alpha = -2$, l'equazione non ha soluzione e dunque f non ha punti critici (equiv. punti di minimo). Quando $\alpha \in (-2, 2)$, l'equazione precedente ha una soluzione unica e dunque f ha un unico punto critico (di minimo).

Esercizio 3 (10 punti) Sia $g \in C([0, 1])$ una funzione continua fissata.

i) Provare che esiste un'unica soluzione $y \in C([0, 1])$ dell'equazione funzionale

$$y(x) = \frac{1}{3} \int_0^x \frac{y(t)}{\sqrt{t}} dt + g(x), \quad x \in [0, 1].$$

ii) Calcolare la soluzione nel caso $g(x) = x$. (È sufficiente determinare la soluzione in forma integrale.)

Soluzione. i) Lo spazio vettoriale $X = C([0, 1])$ munito della norma del sup è uno spazio metrico completo. Introduciamo la trasformazione $T : X \to X$ che alla funzione $y \in X$ associa la funzione $Ty \in X$ definita da

$$Ty(x) = \frac{1}{3} \int_0^x \frac{y(t)}{\sqrt{t}} dt + g(x), \quad x \in [0, 1].$$

Osserviamo innanzi tutto che Ty è una funzione continua. Infatti, dati $x_1, x_2 \in [0, 1]$ si ha

$$\begin{aligned}
|Ty(x_1) - Ty(x_2)| &= \Big|\frac{1}{3} \int_{x_2}^{x_1} \frac{y(t)}{\sqrt{t}} dt + g(x_1) - g(x_2)\Big| \\
&\leq \frac{1}{3} \|y\|_\infty \Big| \int_{x_2}^{x_1} \frac{1}{\sqrt{t}} dt \Big| + |g(x_1) - g(x_2)| \\
&\leq \frac{2}{3} \|y\|_\infty |\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}| + |g(x_1) - g(x_2)|,
\end{aligned}$$

da cui si deduce la continuità di $x \mapsto Ty(x)$. Qui usiamo la continuità di g.
Verifichiamo ora che T è una contrazione da X in se. Infatti, se $y_1, y_2 \in X$ allora

$$|Ty_1(x) - Ty_2(x)| = \frac{1}{3}\Big| \int_0^x \frac{y_1(t) - y_2(t)}{\sqrt{t}} dt\Big| \leq \frac{1}{3}\|y_1 - y_2\|_\infty \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}} dt = \frac{2}{3}\|y_1 - y_2\|_\infty,$$

e quindi $\|Ty_1 - Ty_2\|_\infty \leq \frac{2}{3}\|y_1 - y_2\|_\infty$. Per il Teorema di punto fisso di Banach, T ha un unico punto fisso $y \in Y$, che è la soluzione, unica, dell'equazione funzionale data.

ii) Se y risolve l'equazione funzionale, allora $y(0) = 0$. Possiamo derivare in x l'identità

$$y(x) = \frac{1}{3} \int_0^x \frac{y(t)}{\sqrt{t}} dt + x, \quad x \in [0, 1],$$

e trovare l'equazione differenziale

$$y'(x) = \frac{1}{3} \frac{y(x)}{\sqrt{x}} + 1, \quad x \in (0, 1].$$

Si tratta di un'equazione lineare, che può essere integrata con il metodo standard. Usando il dato iniziale $y(0) = 0$ si trova la soluzione

$$y(x) = \int_0^x \mathrm{e}^{\frac{2}{3}(\sqrt{x} - \sqrt{t})} dt, \quad x \in [0, 1].$$

Omettiamo i conti intermedi. Usando la sostituzione $s = \frac{2}{3}\sqrt{t}$ si trova

$$\int_0^x \mathrm{e}^{-\frac{2}{3}\sqrt{t}} dt = \frac{9}{2} \int_0^{\frac{2}{3}\sqrt{x}} \mathrm{e}^{-s} s ds,$$

e l'ultimo integrale di calcola per parti. Dopo alcuni conti che sono omessi si arriva alla soluzione

$$y(x) = \frac{9}{2}\Big[\mathrm{e}^{\frac{2}{3}\sqrt{x}} - \frac{2}{3}\sqrt{x} - 1\Big].$$