Analisi Matematica 2 — Tema A

Nome, cognome, matricola: Scritto del 30/8/2016

Esercizio 1 Dato un parametro $\alpha \in \mathbb{R}$, si consideri la 1-forma differenziale in $\mathbb{R}^2$:

$$\omega(x,y) = \frac{2x + \alpha e^y}{x^2 + e^y}dx + \frac{\alpha x + e^y}{x^2 + e^y}dy.$$

i) Determinare tutti gli $\alpha \in \mathbb{R}$ tali che ω sia esatta su $\mathbb{R}^2$. Poi per tali α:

ii) Calcolare un potenziale f di ω su $\mathbb{R}^2$.

iii) Data la curva $\gamma : [0,\pi] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = \big(\sin t, 1 - \cos(t/2)\big)$ con $t \in [0,\pi]$, calcolare l'integrale

$$I = \int_\gamma \omega.$$

Risposte: i) $\alpha \in$; ii) $f =$; iii) $I =$

Esercizio 2 Siano $Q = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0 \text{ e } y > 0\}$ il primo quadrante ed $A = \{(x,y) \in Q : x^2 + 4y^2 < 16 \text{ e } y < 2 + \log(xy)\}$.

i) Stabilire se $A \subset \mathbb{R}^2$ è aperto e provare che $A \neq \emptyset$.

ii) Stabilire se la chiusura $\bar{A} \subset \mathbb{R}^2$ è un insieme compatto.

iii) Rappresentare A nel piano cartesiano.

Risposte: i) A aperto: ; ii) $\bar{A}$ compatto: ; iii) Disegno:

Esercizio 3 Al variare di $x \in \mathbb{R}$ si consideri la serie di funzioni

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^2 + e^{-n}}{1 + n^2 x^2}.$$

i) Studiare la convergenza puntuale della serie.

ii) Studiare la convergenza uniforme della serie.

Risposte: i) CP per $x \in$; ii) CU per $x \in$

Esercizio 4 Siano $\beta > 0$ un parametro, $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ il disco chiuso ed $f : K \to \mathbb{R}$ la funzione

$$f(x,y) = (x^2 + y^2)^2 - \beta xy.$$

i) Calcolare tutti i punti critici di f interni a K al variare di β.

ii) Calcolare tutti i punti di minimo assoluto di f in K al variare di β.

Risposte: i) p.ti critici int.: ; ii) p.ti min. ass.:

3 ore a disposizione

Analisi Matematica 2 — Tema B

Nome, cognome, matricola: Scritto del 30/8/2016

Esercizio 1 Dato un parametro $\alpha \in \mathbb{R}$, si consideri la 1-forma differenziale in $\mathbb{R}^2$:

$$\omega(x,y) = \frac{2\alpha x e^y}{x^2 e^y + 1} dx + \frac{x^2 e^{\alpha y}}{x^2 e^y + 1} dy.$$

i) Determinare tutti gli $\alpha \in \mathbb{R}$ tali che ω sia esatta su $\mathbb{R}^2$. Poi per tali α:

ii) Calcolare un potenziale f di ω su $\mathbb{R}^2$.

iii) Data la curva $\gamma : [0,\pi] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = \big(1-\cos(t/2), \sin t\big)$ con $t \in [0,\pi]$, calcolare l'integrale

$$I = \int_\gamma \omega.$$

Risposte: i) $\alpha \in$; ii) $f =$; iii) $I =$

Esercizio 2 Siano $Q = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0 \text{ e } y > 0\}$ il primo quadrante ed $A = \{(x,y) \in Q : x^2 + 4y^2 > 16 \text{ e } y < \log(xy)\}$.

i) Stabilire se $A \subset \mathbb{R}^2$ è aperto e provare che $A \neq \emptyset$.

ii) Stabilire se la chiusura $\bar{A} \subset \mathbb{R}^2$ è un insieme compatto.

iii) Rappresentare A nel piano cartesiano.

Risposte: i) A aperto: ; ii) $\bar{A}$ compatto: ; iii) Disegno:

Esercizio 3 Al variare di $x \in \mathbb{R}$ si consideri la serie di funzioni

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{nx^2+1}{e^n + n^3 x^2}.$$

i) Studiare la convergenza puntuale della serie.

ii) Studiare la convergenza uniforme della serie.

Risposte: i) CP per $x \in$; ii) CU per $x \in$

Esercizio 4 Siano $\beta > 0$ un parametro, $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ il disco chiuso ed $f : K \to \mathbb{R}$ la funzione

$$f(x,y) = xy - \beta(x^2+y^2)^2.$$

i) Calcolare tutti i punti critici di f interni a K al variare di β.

ii) Calcolare tutti i punti di massimo assoluto di f in K al variare di β.

Risposte: i) p.ti critici int.: ; ii) p.ti max. ass.:

3 ore a disposizione

<u>Esercizio</u> Dato un parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ si consideri la 1-forma differenziale in $\mathbb{R}^2$

$$\omega = \frac{2\alpha x e^{y}}{x^2 e^y + 1}\, dx + \frac{x^2 e^{\alpha y}}{x^2 e^y + 1}\, dy .$$

i) Determinare $\alpha \in \mathbb{R}$ tale che ω sia esatta su $\mathbb{R}^2$.

ii) Per tali α, calcolare un potenziale di ω in $\mathbb{R}^2$

iii) Data $\gamma : [0,\pi] \to \mathbb{R}^2$ $\gamma(t) = (1 - \cos(t/2), \sin t)$ con $t \in [0,\pi]$ calcolare l'integrale

$$I = \int_\gamma \omega .$$

Soluzione. i) Siccome $\mathbb{R}^2$ è convesso ($\Rightarrow$ semplicemente connesso) ω è esatta se e solo se è chiusa in $\mathbb{R}^2$.

Imponiamo la condizione di chiusura

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{2\alpha x e^{y}}{x^2 e^y + 1}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x^2 e^{\alpha y}}{x^2 e^y + 1}\right)$$

ovvero:

$$\frac{2\alpha x e^y (x^2 e^y + 1) - 2\alpha x e^y \cdot x^2 e^y}{(x^2 e^y + 1)^2} = \cancel{\frac{\alpha x^2 e^{\alpha y}(x^2 e^y + 1) - x^2 e^{\alpha y}}{(x^2 e^y + 1)^2}}$$

$$= \frac{2x e^{\alpha y}(x^2 e^y + 1) - x^2 e^{\alpha y} \cdot 2x e^y}{(x^2 e^y + 1)^2}$$

ovvero:

$$2\alpha x e^y = 2x e^{\alpha y} \qquad \forall x, y \in \mathbb{R} .$$

Con $x = 1$ e $y = 0$ deduciamo che $\alpha = 1$.

ii) Dunque con $\alpha = 1$, si ha

$$\omega = \frac{2x e^y}{x^2 e^y + 1} \, dx + \frac{x^2 e^y}{x^2 e^y + 1} \, dy$$

Cerchiamo $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$ tale che

$$\begin{cases} f_x = \dfrac{2x e^y}{x^2 e^y + 1} \\ \\ f_y = \dfrac{x^2 e^y}{x^2 e^y + 1} \end{cases}$$

Integriamo la prima equazione:

$$f(x,y) = \int \frac{\partial}{\partial x} f(x,y) \, dx = \int \frac{2x e^y}{x^2 e^y + 1} \, dx$$

$$= \log(x^2 e^y + 1) + c(y)$$

Quindi:

$$\frac{x^2 e^y}{x^2 e^y + 1} = f_y(x,y) = \frac{x^2 e^y}{x^2 e^y + 1} + c'(y)$$

da cui si trova $c'(y) = 0$ che implica $c(y) = c_0$ costante. Scegliamo $c_0 = 0$. Il potenziale è

$$f(x,y) = \log(x^2 e^y + 1).$$

iii) Osserviamo che $\gamma(0) = (0,0)$ e $\gamma(\pi) = (1,0)$.
Siccome ω è esatta con potenziale f:

$$I = \int_\gamma \omega = f(\gamma(\pi)) - f(\gamma(0))$$

$$= f(1,0) - f(0,0)$$

$$= \log(1+1) - \log(1) = \log 2.$$

$\square$

<u>Esercizio</u> Sia $Q = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x>0 \text{ e } y>0\}$ il primo quadrante e sia $A = \{(x,y) \in Q : x^2+4y^2 < 16 \text{ e } y < 2+\log(xy)\}$.

i) Stabilire se A è aperto e provare che $A \neq \emptyset$.

ii) Stabilire se $\overline{A}$ è compatto.

iii) Rappresentare A nel piano.

Soluzione. i) Q è aperto. Le funzioni

$f_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ed $f_2 : Q \to \mathbb{R}$

$$f_1(x,y) = x^2+4y^2-16$$

$$f_2(x,y) = y-2-\log(xy)$$

sono continue. Quindi

$$A_1 = f_1^{-1}((-\infty,0)) \text{ è aperto}$$

$$A_2 = f_2^{-1}((-\infty,0)) \text{ è aperto}$$

Quindi $A = Q \cap A_1 \cap A_2$ è aperto.

Osserviamo che $(1,1) \in A$. Infatti:

$$1+4 < 16 \quad \text{e} \quad 1 < 2+\log 1 = 2.$$

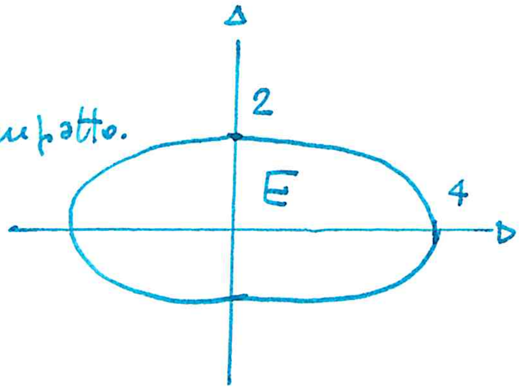
Quindi $A \neq \emptyset$.

ii) $\overline{A}$ è chiuso (è la chiusura di un insieme).

Vediamo se A è limitato. L'insieme

$E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+4y^2 < 16\}$ è un'ellisse:

Dunque E è limitato e quindi A è limitato essendo $A \subset E$. Per Heine-Borel $\bar{A}$ è compatto.

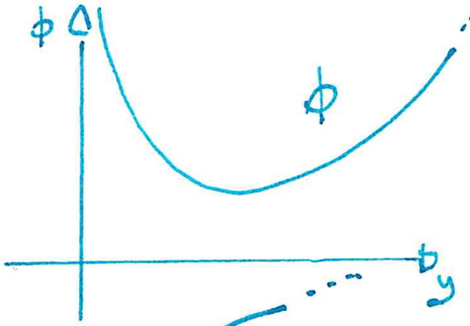


iii) Studiamo la disequazione

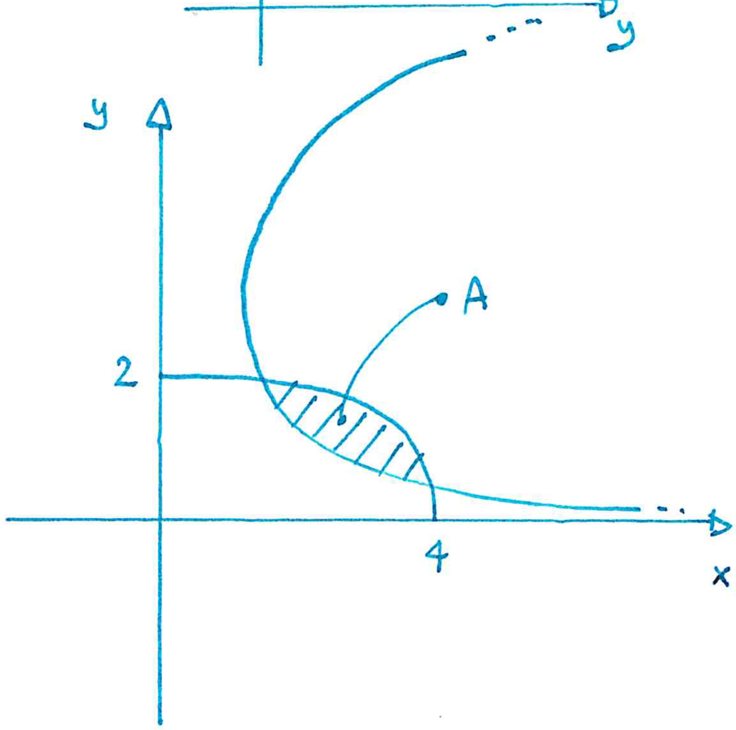
$$y < 2 + \log(xy) \iff y - 2 < \log(xy)$$
$$\iff e^{y-2} < xy$$
$$\overset{(y>0)}{\iff} \frac{1}{y} e^{y-2} < x .$$

Studiamo brevemente la funzione $\phi(y) = \frac{1}{y} e^{y-2}$.

Disegno per $y > 0$:



Quindi:



$\square$

Esercizio Per $x \in \mathbb{R}$ si consideri

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n x^2 + 1}{e^n + n^3 x^2} .$$

i) Studiare la convergenza puntuale.

ii) Studiare la convergenza uniforme.

Soluzione. i) Serie a termini positivi. Per $x=0$ si ha

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{0+1}{e^n + 0} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{e}\right)^n = \frac{1}{1 - 1/e} < \infty .$$

Per $x \neq 0$ si ha per confronto:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n x^2 + 1}{e^n + n^3 x^2} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n x^2 + 1}{n^3 x^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} + \frac{1}{x^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} < \infty$$

ii) Partiamo da qui:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n x^2 + 1}{e^n + n^3 x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n x^2}{e^n + n^3 x^2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{e^n + n^3 x^2} .$$

La seconda serie converge uniformemente per il criterio di Weierstrass:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{e^n + n^3 x^2} \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{e^n} = \frac{1}{1 - 1/e} .$$

La prima serie converge uniformemente per il criterio di Weierstrass:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n x^2}{e^n + n^3 x^2} \overset{(x\neq 0)}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\frac{e^n}{x^2} + n^3} \overset{(\forall x)}{\leq} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty.$$

Quindi la serie converge uniformemente su tutto $\mathbb{R}$.

$\square$

Esercizio Dato $\beta > 0$, posto $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 1\}$ si consideri $f : K \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = (x^2+y^2)^2 - \beta xy .$$

i) Calcolare tutti i punti critici di f interni a K

ii) Calcolare tutti i punti di minimo assoluto di f su K.

Soluzione. f è continua e K è compatto. Quindi ci sono in K punti di minimo assoluto

i) Calcoliamo i punti critici:

$$\begin{cases} f_x = 2(x^2+y^2) \cdot 2x - \beta y = 0 \\ f_y = 2(x^2+y^2) \cdot 2y - \beta x = 0 \end{cases}$$

Le due equazioni implicano che $x f_x - y f_y = 0$ ovvero

$$4(x^2+y^2)(x^2-y^2) = 0$$

che implica $x = y = 0$ $(\Leftrightarrow x^2+y^2=0)$ oppure $x = \pm y$.

Dunque $(0,0)$ è un punto critico. Inseriamo $x = \pm y$ ad es. nella prima equazione:

$$2(y^2+y^2) \cdot 2(\pm y) - \beta y = 0 \Leftrightarrow \pm 8y^3 - \beta y = 0$$

Con la scelta + si trova $8y^3 - \beta y = 0$ ovvero

$y(8y^2 - \beta) = 0$ che fornisce $y = 0$ oppure

$8y^2 - \beta = 0$. Sappiamo che $y=0 \Rightarrow x=0$, già considerato. L'altra equazione fornisce

$$(*) \qquad y = \pm\sqrt{\frac{\beta}{8}} \implies x = \pm\sqrt{\frac{\beta}{8}}.$$

Con la scelta − si trova $-8y^3 - \beta y = 0$ ovvero

$-y(8y^2+\beta) = 0$ che fornisce $y=0$ (già fatto)

oppure $8y^2+\beta = 0$, che non ha soluzione.

Troviamo i due punti critici dati da $(*)$:

$$\left(\sqrt{\frac{\beta}{8}}, \sqrt{\frac{\beta}{8}}\right) \quad e \quad \left(-\sqrt{\frac{\beta}{8}}, -\sqrt{\frac{\beta}{8}}\right).$$

Sono interni a K se e solo se:

$$\left(\sqrt{\frac{\beta}{8}}\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{\beta}{8}}\right)^2 < 1 \iff \beta < 4.$$

ii) Studiamo f sulla circonferenza $\partial K = \{x^2+y^2=1\}$.
Per $\theta \in [0, 2\pi]$:

$$\phi(\theta) = f(\cos\theta, \sin\theta) = 1 - \beta \sin\theta\cos\theta$$
$$= 1 - \frac{\beta}{2}\sin(2\theta)$$

Dunque ϕ è minimo per $\sin 2\theta = 1$ ovvero $2\theta = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$ e quindi $\theta_1 = \frac{\pi}{4}$ e $\theta_2 = \frac{5}{4}\pi$.

Qui ϕ vale $\phi(\frac{\pi}{4}) = \phi(\frac{5}{4}\pi) = 1 - \frac{\beta}{2}$.

Abbiamo i seguenti casi:

1° <u>caso</u> $\beta \geq 4$. Allora $(0,0) \in \text{int}(K)$ è l'unico p.to critico interno. Qui si ha $f(0,0) = 0$. Quindi il valore minimo di f è $1 - \beta/2$ ed è assunto sulla frontiera (anche in $(0,0)$ se $\beta = 4$).

2° <u>caso</u> $0 < \beta < 4$. Nei punti $\left(\pm\sqrt{\frac{\beta}{8}}, \pm\sqrt{\frac{\beta}{2}}\right)$ f assume il valore:

$$f\left(\sqrt{\frac{\beta}{8}}, \sqrt{\frac{\beta}{8}}\right) = \left(\frac{\beta}{4}\right)^2 - \beta\frac{\beta}{8} = \beta^2\left(\frac{1}{16} - \frac{1}{8}\right)$$

$$= -\frac{\beta^2}{16}.$$

Studiamo la disequazione:

$$-\frac{1}{16}\beta^2 \leq 1 - \frac{\beta}{2} \iff \frac{\beta^2}{16} - \frac{\beta}{2} + 1 \geq 0$$

$$\iff \left(\frac{\beta}{4} - 1\right)^2 \geq 0$$

Dunque $0 < \beta < 4 \implies -\frac{\beta^2}{16} < 1 - \frac{\beta}{2}$. Dunque i p.ti $\left(\pm\sqrt{\frac{\beta}{8}}, \pm\sqrt{\frac{\beta}{8}}\right)$ sono di minimo assoluto.

$\square$