Analisi Matematica 2 — Foglio 11

Punti fissi, teorema di invertibilità, funzioni implicite — 1 Giugno 2016

Esercizio 1. Determinare tutti i numeri $\alpha \geq 0$ tali che la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \sqrt{1 + \alpha x^2}, \quad x \in \mathbb{R},$$

sia una contrazione rispetto alla distanza Euclidea.
Risp.: $\alpha < 1$.

Esercizio 2. Determinare tutti i valori del parametro $\lambda \in \mathbb{R}$ tali che la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$f(x, y) = (x + \lambda y, y - (\lambda + 1)x^2)$$

sia un diffeomorfismo. Calcolare in questi casi la funzione inversa.

Esercizio 3. Discutere l'esistenza di soluzioni $x, y, z \in \mathbb{R}$ per il sistema di equazioni

$$\begin{cases} x + \mathrm{e}^z + yz\sin(x) = 1 \\ z\mathrm{e}^z + \sin(xyz) + y^2 x = 0. \end{cases}$$

Esercizio 4. Discutere l'esistenza di soluzioni $x, y, z, w \in \mathbb{R}$ in un intorno di $0 \in \mathbb{R}^4$ del sistema non lineare di equazioni

$$\begin{cases} \mathrm{e}^{x+w} + xy + zw\mathrm{e}^{y+z} = 1 \\ y + \sin(xyz) + \cos(xzw) = 1. \end{cases}$$

Esercizio 5. Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la funzione $f(x, y, z) = z\mathrm{e}^{xy} + xy\mathrm{e}^z + xyz$.

i) Provare che l'equazione $f(x, y, z) = 0$ definisce intorno a 0 una funzione di classe C^∞ che esplicita una variabile in funzione delle altre due.

ii) Calcolare il gradiente di φ in $0 \in \mathbb{R}^2$.

iii) Stabilire se la matrice Hessiana $H\varphi$ nel punto $0 \in \mathbb{R}^2$ è semidefinita positiva oppure negativa (o nessuna delle due).

Esercizio 6. ★ Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione con costante di Lipschitz $L = \mathrm{Lip}(f) < 1$ (una contrazione). Provare che la funzione $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$F(x, y) = (x + f(y), y + f(x)), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

è iniettiva e suriettiva. È vero che $F^{-1} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ è Lipschitziana?