Analisi Matematica 2 — Foglio 2

Serie numeriche 2 — 18 Marzo 2016

Esercizio 1 Sia Q un quadrato di lato 2 e sia Q_n, $n \geq 1$, una successione di quadrati tali che Q_n abbia lato $1/n$. È possibile disporre tutti i quadrati Q_n dentro il quadrato Q senza che si sovrappongano fra loro?

Esercizio 2 Al variare di $x \in \mathbb{R}$ studiare la convergenza semplice e assoluta delle serie

$$\text{i)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^4}{3^n}\Big(\frac{x}{x+1}\Big)^{n+1}; \quad \text{ii)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n2^n(\sin(2x))^n}{n^2+1}; \quad \text{iii)} \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{n(x^2-3x+2)^n}{2^n(n^2+4)}.$$

Risposte: i) converge assolutamente e semplicemente per $x \in (-\infty, -3/2) \cup (-3/4, \infty)$, non converge (nè semplicemente nè assolutamente) per $x \in [-3/2, -3/4]$; ii) discutere i casi $|\sin 2x| < 1/2$, $|\sin 2x| > 1/2$, $\sin 2x = 1/2$, $\sin 2x = -1/2$. Nell'ultimo caso c'è convergenza semplice (Leibniz) ma non assoluta (Criterio del confronto).

Esercizio 3 Studiare la convergenza delle serie

$$\text{i)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n-\log n}; \quad \text{ii)} \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{x^{2n}+|2x|^n}, \quad x \in \mathbb{R}; \quad \text{iii)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{1+|y|^n},\ x, y \in \mathbb{R}.$$

i) Converge semplicemente ma non assolutamente (Confronto con la serie armonica).

Esercizio 4 Studiare la convergenza semplice della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\Big(1-n\log\Big(1+\frac{1}{n}\Big)\Big).$$

Esercizio 5 Al variare dei numeri reali $\alpha > 0$ ed $x > 1$ studiare la convergenza delle serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\log n!)^{\alpha}}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\log x)^{\log n}}.$$

Esercizio 6 ★ Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione reale positiva e crescente. Provare che la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}\Big(1-\frac{a_{n-1}}{a_n}\Big)$$

converge se e solo se esiste finito il limite $\lim_{n\to\infty} a_n$.

Idee: serie telescopiche, $\log(1+x) \leq x$.