

Analisi Matematica 2

Foglio 5

Spazi metrici e limiti in più variabili

14 Aprile 2016

Esercizio 1. Quali tra le seguenti funzioni $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$ sono distanze su \mathbb{R} ?

ii) $d(x, y) = |x - y| + |x^3 - y^3|$.

iii) $d(x, y) = x^2 + y^2 + xy$.

iv) $d(x, y) = \frac{|x - y|}{1 + |x - y|}$.

Esercizio 2. Determinare il più grande sottoinsieme di \mathbb{R}^2 su cui è definita ciascuna delle seguenti funzioni:

i) $f(x, y) = \sqrt{xy + \log x}$; ii) $g(x, y) = \sqrt{xe^y - ye^x}$; iii) $h(x, y) = \sqrt{xy(xy - 1)}$.

Esercizio 3. Stabilire se esistono ed eventualmente calcolare i seguenti limiti:

$$\text{i) } \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(x^2 + y^4)}{x^2 + y^2}; \quad \text{ii) } \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(x^4 + y^4)}{x^2 + y^2}.$$

Esercizio 4. Stabilire se la funzione $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x \sin y - y \sin x}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0), \end{cases}$$

è continua nel punto $(0, 0)$.

Esercizio 5. Determinare tutti i valori del parametro $\alpha > 0$ tali che la funzione $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{y|x|^\alpha}{x^4 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0), \end{cases}$$

sia continua nel punto $(0, 0)$.

Esercizio 6. ★ Sia $\alpha \in (0, 1]$ e definiamo la funzione $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty)$

$$d(x, y) = |x - y|^\alpha, \quad x, y \in \mathbb{R}^n,$$

dove $|\cdot|$ è la norma standard di \mathbb{R}^n . Provare che (\mathbb{R}^n, d) è uno spazio metrico.