LEZIONE 1

venerdì 4 marzo 2016 08:30

Presentazione del corso di Analisi Matematica 2

Analisi Matematica 2 – 2016
Fisica e Astronomia

- **Docente**:
  Roberto Monti
  Dipartimento di Matematica
  Torre Archimede, scala D, VII piano, Studio 730
  Tel. 049 827 14 21
  Posta elettronica: monti@math.unipd.it
  Pagina internet:
  http://www.math.unipd.it/~monti/didattica.html
  http://www.math.unipd.it/~monti/A2_2016.html

- **Orario lezioni**:
  lunedì 12.30–14.30, Aula E 12.30 – 14.00
  martedì 12.30–14.30, Aula E 12.30 – 14.00
  venerdì 8.30–10.30, Aula F 8.30 - 9.15 9.30 - 10.15

- **Calendario del corso**: inizio 4 Marzo 2016, lezione del 7 marzo cancellata, da 9 al 13 Maggio lezioni sospese, termine del corso prevista per il 7 Giugno circa. Totale 64 ore.

- **Didattica di supporto a cura del dott. M. Fogagnolo**: Orari ed Aula saranno fissati al più presto.

- **Tutorato a cura di D. Coletto**: Orari ed Aula saranno fissati al più presto.

  Problemi con Astronomia

- **Ricevimento**: lunedì 10.30–12.20, Ufficio 730, Piano VII, Scala D di Torre Archimede, via Trieste 63. ~~Preferibile~~ appuntamento per e-mail. Oppure per appuntamento e-mail anche in altri giorni e orari.

- **Materiali on line**: Alla pagina internet del corso verranno messi in rete gli appunti delle lezioni. Ogni settimana verranno anche proposti on line esercizi e problemi da risolvere. Con frequenza settimanale verranno pubblicati on-line i pdf delle lezioni fatte al tablet.

- **Struttura del corso**: Lezioni alla lavagna oppure su tablet di teoria ed esercizi.

- **Testi di riferimento**:
  1) È in rete una VERSIONE PROVVISORIA degli Appunti del Corso. I primi due capitoli sono stabili. I successivi sono in corso di revisione. Alla fine del corso sarà pubblicata la versione definitiva degli appunti che coprirà l'intero programma.
  Altri testi di riferimento (ma non adottati):
  2) N. Fusco, P. Marcellini, C. Sbordone, Analisi matematica due, Liguori, ultima edizione. È un libro concreto e rigoroso. Ha i suoi volumi di esercizi associati.

  3) E. Giusti, Analisi Matematica 2, Boringhieri. Continua l'Analisi 1 dello stesso autore. Ma è un po' più difficile.
  4) G. De Marco, Analisi due – teoria ed esercizi –, Zanichelli 1999. Un classico per l'Università di Padova.

- **Testi di esercizi**:

stesso autore. Ma è un po' più difficile.

4) G. De Marco, Analisi due – teoria ed esercizi –, Zanichelli 1999. Un classico per l'Università di Padova.

– **Testi di esercizi**:

1) È prevista la pubblicazione in rete di fogli settimanali di esercizi e problemi. I problemi assegnati per casa saranno parte integrante del programma del corso.
2) Alla fine degli Appunti del Corso disponibili in rete si trovano numerosi esercizi.
3) P. Marcellini, C. Sbordone, Esercizi di Matematica, Volume II - Tomi 1-2-3-4, Liguori. Contiene molti esercizi di base ed esercizi con soluzione.
4) E. Giusti, Esercizi e complementi di Analisi matematica, Volume secondo, Boringhieri.

– **Modalità d'esame**. Le modalità precise d'esame verranno fissate nelle prossime settimane. In prima approssimazione, l'esame dovrebbe prevedere una prova scritta con problemi ed esercizi, ed una prova orale in cui lo studente deve dimostrare di aver compreso gli argomenti spiegati nel corso (definizioni, teoremi e dimostrazioni). Per accedere alla prova orale sarà necessario superare quella scritta. È possibile che le prove scritte siano precedute da una preselezione. Non sono previste prove parziali.

– **Appelli d'esame (date da confermare):**

Sessione estiva:
Primo Appello Scritto: 14 Giugno 8.30
Primo Appello Orale: 20 Giugno 8.30 Probabile modifica
Secondo Appello Scritto: 27 Giugno ore 8.30
Secondo Appello Orale: 6 Luglio ore 8.30

Sessione di Recupero:
Primo Appello Scritto: 30 Agosto ore 8.30
Primo Appello Orale: 6 Settembre ore 8.30
Secondo Appello Scritto: 12 Settembre ore 8.30
Secondo Appello Orale: 15 Settembre ore 8.30

Sessione Invernale (Febbraio 2017): da definire

– **Iscrizione agli esami.** Sistema UNIWEB. Controllare sempre data, orario ed aula.

Analisi Matematica 2 – 2015–16
Fisica–Astronomia

Programma provvisorio del corso

1) Serie numeriche. Serie geometrica. Serie telescopiche. Serie armonica generalizzata. Criterio della radice e del rapporto per serie reali. Convergenza assoluta di serie reali e complesse. Serie reali a segno alterno. Criterio di Leibniz. Criterio del confronto asintotico

2) Integrali generalizzati. Criteri del confronto e del confronto asintotico, convergenza assoluta. Criterio di convergenza per integrali oscillanti. Convergenza di serie ed integrali.

3) Spazi metrici. Definizioni, insiemi aperti, interno e chiusura. Funzioni continue. Spazi metrici completi e teorema e delle contrazioni. Topologia di uno spazio metrico. Spazi metrici compatti e teorema di Weierstrass. Insiemi connessi.

4) Serie di funzioni. Successioni e serie di funzioni. Convergenza uniforme. Criterio di Weierstrass. Serie di potenze. Funzione esponenziale in campo reale e complesso.

5) Calcolo differenziale in più variabili. Derivate parziali e derivate direzionali in $\mathbb{R}^n$. Funzioni differenziabili. Gradiente e matrice Jacobiana. Differenziale della

Criterio di Weierstrass. Serie di potenze. Funzione esponenziale in campo reale e complesso.

5) Calcolo differenziale in più variabili. Derivate parziali e derivate direzionali in $\mathbb{R}^n$. Funzioni differenziabili. Gradiente e matrice Jacobiana. Differenziale della funzione composta. Teoremi del valor medio. Funzioni di classe C^1. Derivate di ordine superiore. Teorema di Schwarz e matrice Hessiana. Funzioni di classe C^k. Punti critici, massimi e minimi locali. Formula di Taylor in più variabili al secondo ordine. Massimi e minimi locali in più variabili.

6) Curve e 1-forme differenziali in $\mathbb{R}^n$ Curve, versore tangente, parametrizzazione. Curve rettificabili e formula della lunghezza. Riparametrizzazione a lunghezza d'arco. Integrali curvilinei. Forme differenziali chiuse ed esatte. Campi conservativi. Integrazione di 1-forme. Teorema di Poincarè.

7) Invertibilità locale e funzione implicita. Teorema di invertibilità locale e Teorema del Dini. Omeomorfismi e diffeomorfismi locali e globali.

Serie Numeriche reali e complesse

- Definizione di serie convergente
- Esempi
- Criterio della condizione necessaria
- Serie a termini positivi:
  - Criterio della Radice / Rapporto
- Serie a segno alterno: Criterio di Leibniz
- Criteri del Confronto / del Confronto asintotico

Serie Numeriche

Sia $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successione di numeri reali o complessi, $a_n \in \mathbb{R}, \mathbb{C}$ per $n \in \mathbb{N}$, ovvero:

$$a_1, a_2, a_3 \dots, a_n, a_{n+1}, \dots$$

Vogliamo dare un senso alla somma infinita:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n + a_{n+1} + \dots$$

Vogliamo che $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \in \mathbb{R}$ op. $\in \mathbb{C}$.

Definiamo preliminarmente la

Definiamo preliminarmente la
la successione $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ delle somme
parziali:

$$s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n \quad , \quad n \in \mathbb{N}$$

Se esiste in $\mathbb{R}$ oppure in $\mathbb{C}$ il limite

$$s = \lim_{n \to \infty} s_n \quad \text{con} \quad s \in \mathbb{R}, \mathbb{C}$$

allora definiamo

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n := s .$$

- Diciamo in questo caso che la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge e chiamiamo s la sua somma
- Negli altri casi diremo che la serie non converge. (se non esiste finito il limite delle somme parziali)
- Se poi $a_n \in \mathbb{R}$ e si ha $\lim_{n \to \infty} s_n = \pm \infty$ scriveremo anche

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \pm \infty$$

e diremo che la serie diverge a $\pm \infty$.

Ricapitolo:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s = \lim_{n \to \infty} s_n$$

a_n: Termine generale della serie.

s: Somma serie

s_n: Succes. somme parziali

Teorema (della condizione necessaria di conv.)
Se la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge allora il suo termine generale è infinitesimo:

$$\lim_{n \to \infty} a_n = 0 .$$

Dim.

Serie converge $\iff \lim_{n \to \infty} s_n = s \in \mathbb{R}, \mathbb{C}$ esiste finito.

Ma avremo anche

$a_n \to L$
$a_{n+1} \to L$

Serie converge $\iff \lim_{n\to\infty} s_n = s \in \mathbb{R}, \mathbb{C}$.

Ma avremo anche

$$\lim_{n\to\infty} s_{n+1} = s$$

Deduciamo che

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} (s_{n+1} - s_n) \overset{A1}{=} \lim_{n\to\infty} s_{n+1} - \lim_{n\to\infty} s_n = s - s = 0$$

□

Esempio La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}$ non converge perché

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+1/n} = 1 \neq 0$$

Termine gen. NON infinitesimo $\Rightarrow$ Serie NON converge.

ESEMPI

① Serie geometrica. Fissiamo $z \in \mathbb{C}$ che sarà la "ragione" della serie.
Vogliamo discutere la serie:

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n \qquad (z^0 = 1).$$

Parto da qui $\quad n \in \mathbb{N}$

$$(1-z)(1+z+z^2+\dots+z^n) = 1 - z^{n+1}$$

Se $z \neq 1$ posso dividere e trovo:

$$\circledast \quad s_n = 1+z+z^2+\dots+z^n = \frac{1-z^{n+1}}{1-z}, \quad z \neq 1$$

ORA: Se $z \in \mathbb{C}$ tale che $|z| < 1$ allora

$$\lim_{n\to\infty} z^{n+1} = 0$$

Infatti $|z^{n+1}| = |z|^{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Dunque

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1 - \overset{0}{z^{n+1}}}{1-z} = \frac{1}{1-z}$$

$$\sum_{n=0} z^n = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1 - z^{n+1}}{1-z} = \frac{1}{1-z}$$

questa è la formula per la serie geometrica

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{2}{2-1} = 2$$

② Serie telescopiche.
Consideriamo una serie del tipo:

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n \quad \text{dove} \quad b_n = a_{n+1} - a_n$$

Le serie di questo tipo si dicono di tipo telescopico: Esempio

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) =$$

$$= \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right)$$

$$= \lim_{N\to\infty} \left(\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} - \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n+1} \right)$$

$$= \lim_{N\to\infty} \left(1 - \frac{1}{N+1} \right) = 1.$$

③ Voglio studiare la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Parto da qui:

$$n^2 = n \cdot n \geq n \cdot (n-1) \qquad n \neq 1$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{1}{n(n-1)} \geq \frac{1}{n^2} \qquad \forall\, n \geq 2$$

Di conseguenza

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2} \leq \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)} = \boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\,n}} = 1$$

$n = k+1$

$n = 2 \to k = 1$

quindi

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2} \leq 1$$

(Argomento per confronto)

$n = 2 \quad n$

(Argomento per confronto)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)\cdot k}$$

$\square$