Lezione 15

lunedì 18 aprile 2016 12:32

Altri Teoremi sulla CU

TEOR 1 Sia $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, una succ. di funzioni derivabili su $[0,1]$. Supponiamo che:

i) Esiste $x_0 \in [0,1]$ tale che $(f_n(x_0))_{n \in \mathbb{N}}$ converge in $\mathbb{R}$.

ii) La successione $(f_n')_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente su $[0,1]$ ad una funzione $g : [0,1] \to \mathbb{R}$.

Allora la succ. $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente su $[0,1]$ ad una funzione $f : [0,1] \to \mathbb{R}$. Di più, f è derivabile su $[0,1]$ e inoltre:

$$f'(x) = g(x) \quad \forall x \in [0,1]$$

Corollario Se $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ è una successione che converge punt. ad f e $(f_n')_{n \in \mathbb{N}}$ convergono uniformemente

Allora:

$$\frac{d}{dx} \underbrace{\lim_{n \to \infty} f_n(x)}_{\cdot\cdot} = \lim_{n \to \infty} \underbrace{\frac{d}{dx} f_n(x)}_{\shortparallel}$$

$$\frac{d}{dx} \underset{\displaystyle f(x)}{\overset{\shortparallel}{}} = \lim_{n\to\infty} f_n'(x)$$

TEOR. 2 Sia $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, una succ. di funz. Riemann-integrabili su $[0,1]$. Supponiamo che $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{} f$ uniformemente su $[0,1]$.

Allora f è Riemann-integrabile ed inoltre:

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx = \int_0^1 \underbrace{\lim_{n\to\infty} f_n(x)}_{\displaystyle \shortparallel \atop \displaystyle f(x)}\,dx .$$

SERIE DI FUNZIONI

$A \subset \mathbb{R}$ opp. $A \subset \mathbb{C}$

Sia poi $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una succ. di funzioni

$$f_n : A \to \mathbb{R} \quad \text{opp.} \quad f_n : A \to \mathbb{C}$$

Formiamo le somme parziali

$$S_n : A \to \mathbb{R} \qquad (S_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x) \qquad x \in A .$$

Se esiste finito

∞

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x) := \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) \quad \forall x \in A$$

diremo che la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$$

converge puntualmente in A.

<u>DEF</u> Diremo che la serie di funzioni

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x), \quad x \in A,$$

converge uniformemente in A

se $$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in A} \left| S_n(x) - \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) \right| = 0 .$$

<u>Esempio</u> $A = \{ z \in \mathbb{C} : |z| < 1 \}$

In A studio la convergenza della serie geometrica

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^k = \frac{1}{1-z}, \quad |z| < 1 \qquad z \in \mathbb{C}$$

c'è conv. puntuale in A.

Studio la conv. uniforme in A.

Somme parziali

$$S_n(z) = \sum_{k=0}^{n} z^k = \frac{1-z^{n+1}}{1-z}$$

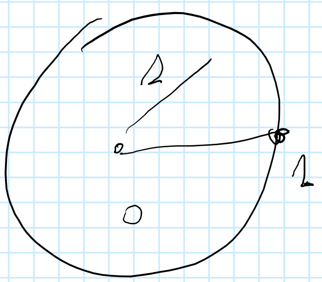
Confronto

$$\left|S_n(z) - \frac{1}{1-z}\right| = \left|\frac{1-z^{n+1}}{1-z} - \frac{1}{1-z}\right| =$$

$$= \left|\frac{-z^{n+1}}{1-z}\right|$$

$$= \frac{|z|^{n+1}}{|1-z|}$$

$$\sup_{z\in A}\left|S_n(z) - \frac{1}{1-z}\right| = \sup_{z\in A} \frac{|z|^{n+1}}{|1-z|}$$



$$= +\infty$$

perché

$$\lim_{\substack{z\to 1 \\ z\in A}} \frac{|z|^{n+1}}{|1-z|} = \frac{1}{0^+} = +\infty.$$

Non c'è CU in A.

Fisso un parametro $0 < \delta < 1$

e considero

$$A_\delta = \{ z \in \mathbb{C} : |z| \leq \delta \}$$

Allora

$$\sup_{z \in A_\delta} \left| S_n(z) - \frac{1}{1-z} \right| = \sup_{z \in A_\delta} \left| \frac{z^{n+1}}{1-z} \right| =$$

$$= \sup_{z \in A_\delta} \frac{|z|^{n+1}}{|1-z|} \leq$$

$$\leq \delta^{n+1} \sup_{z \in A_\delta} \frac{1}{|1-z|} \leq$$

$$\leq \frac{\delta^{n+1}}{1-\delta} \xrightarrow[n \to \infty]{\text{perché } \delta < 1} 0$$

Conto $|1-z| \geq 1 - |z| \geq 1 - \delta$

$|z| \leq \delta$

$$\forall |z| \leq \delta$$

$$\frac{1}{} \leq \frac{1}{}$$

$$\frac{1}{|1-z|} \leq \frac{1}{1-\delta}$$

Convergenza su A_δ c'è cu $\forall \delta < 1$.

TEOR. (Criterio di Weirstrass)

Sia $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una succ. di funzioni definite su A. Supponiamo che esista una successione numerica (reale) tale che:

i) $\sup_{x \in A} |f_n(x)| \leq a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

ii) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$

Allora la serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \qquad x \in A$$

Converge uniformemente su A.

Dim. In primo luogo

$$\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$$

$$\forall x \in A$$

ovvero la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

converge $\forall x$ assolutamente

Continuiamo così:

$$\left| \sum_{k=1}^{n} f_k(x) - \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) \right| =$$

$$= \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x) \right| \leq$$

$$\leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |f_k(x)| \quad \underset{a_k}{\wedge} \quad \forall x \in A \quad \forall k$$

$$\leq \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k$$

$$\sup_{x \in A} \left| \right| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k$$

$n \to \infty$

$\downarrow n \to \infty$
0 perché è il Resto di una serie convergente.

Quindi la serie conv. unif. su A.

$\square$

ESERCIZIO Studiare la convergenza puntuale e uniforme della seguente serie di funzioni:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1+n^2 x)\, e^{-nx}}{1+n^2}, \quad x \geq 0.$$

Soluzione. Avremo questo

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-nx}}{1+n^2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2 x\, e^{-nx}}{1+n^2}$$

la prima converge uniformemente

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-nx}}{1+n^2} \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2+1} < \infty$$

stima
uniforme.

Studio la CU della serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2 x e^{-nx}}{1+n^2} = f_n(x) \geq 0$$

$x \geq 0$

Studio la funzione f_n:

Derivata:

$$f_n'(x) = \frac{n^2}{1+n^2}\left(e^{-nx} - nx\, e^{-nx}\right)$$

$$= \frac{n^2}{1+n^2} e^{-nx} (1-nx)$$

Dunque

$$f_n'(x) \geq 0 \iff 1-nx \geq 0$$

$$\iff x \leq 1/n$$

Quindi $x = \frac{1}{n}$ è (l'unico) punto di massimo assoluto su $[0,\infty)$.

Qui avremo

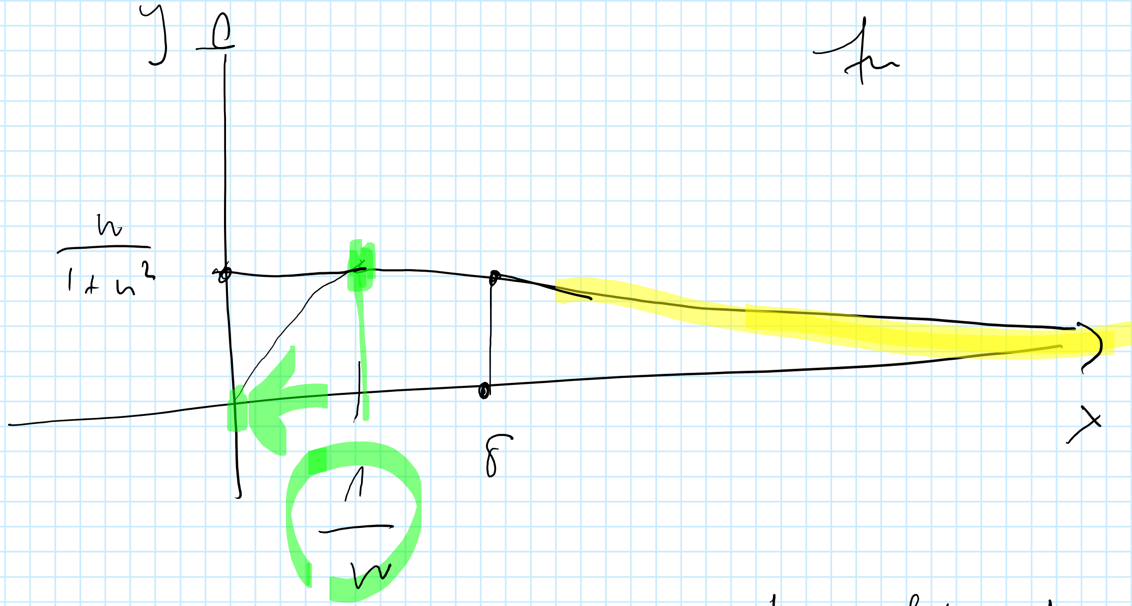
$$a_n = f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{n^2}{1+n^2}\,\frac{1}{n}\,e^{-1}$$

$$= \frac{1}{e} \frac{n}{1+n^2}$$

La serie corrisp. è:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{1}{e} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{1+n^2} = \infty$$

Non funziona il crit. di Weierstrass



Sia ora $\delta > 0$ un parametro fissato e studio la convergenza uniforme su $[\delta, \infty)$. Devo individuare

$$b_n = \sup_{x \geq \delta} |f_n(x)| = f_n(\delta)$$

definitivamente per tutti gli $n \in \mathbb{N}$ grandi.

Per Weierstrass c'è CU su $[\delta, \infty)$ perché

∞

$$\sum_{n=1} f_n(\delta) < \infty .$$

Ripeto:

Serie converge unif. in $[\delta, \infty)$ $\forall \delta > 0$.

Affermo che la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 x\, e^{-nx}}{1+n^2} = g(x)$$

NON converge unif. in $[0, \delta]$ per alcun $\delta > 0$.

Avremo $g(0) = 0$.

Poi osservo questo

$$\frac{n^2}{1+n^2}\, x\, e^{-nx} \geq \frac{1}{2}\, x\, e^{-nx}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{1+n^2}\, x\, e^{-nx} \geq \frac{1}{2}\, x \sum_{n=1}^{\infty} \left(e^{-x}\right)^n =$$

$$= \frac{x}{2}\left[\frac{1}{1-e^{-x}} - 1\right]$$

$$= \frac{x}{2}\, \frac{e^{-x}}{1-e^{-x}}$$

$$\lim_{x \to 0^+} \sum \ldots \geq \lim_{x \to 0^+} \frac{x}{2} \frac{1}{1 - e^{-x}}$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{e^{-x}}$$

$$= \frac{1}{2}$$

Ho scoperto che

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) \geq \frac{1}{2}$$

E però $f(0) = 0$

Quindi

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 x}{1 + n^2} e^{-nx}$$

NON è CONT. in $x = 0$.

Quindi la serie NON CONVERGE unif. su $[0, \delta]$ perché la somma non è cont. $x = 0$. □