Lezione 21

martedì 3 maggio 2016 12:31

A) f è differenziabile in x_0

B) Esistono $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$ e $E_{x_0} : A \to \mathbb{R}^m$ tali che

$$f(x) = f(x_0) + T(x - x_0) + E_{x_0}(x)$$

e

$$\lim_{x \to x_0} \frac{E_{x_0}(x)}{|x - x_0|} = 0 \quad \text{ovvero } E_{x_0}(x) = o(|x - x_0|) \quad x \to x_0$$

TEOR A) $\Leftrightarrow$ B)

A $\Rightarrow$ B)

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - df(x_0)(x - x_0)}{|x - x_0|} = 0$$

Allora scelgo $T = df(x_0) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$

e

$$E_{x_0}(x) := f(x) - f(x_0) - df(x_0)(x - x_0) \quad x \in A$$

Ma

$$\lim_{x \to x_0} \frac{E_{x_0}(x)}{|x - x_0|} = 0$$

B) $\Rightarrow$ A) Esistono $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$ $E_{x_0} : A \to \mathbb{R}^m$

tali che

$$f(x) = f(x_0) + T(x - x_0) + E_{x_0}(x)$$

$$\frac{E_{x_0}(x)}{|x - x_0|} \xrightarrow[x \to x_0]{} 0$$

Ma allora

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - T(x - x_0)}{|x - x_0|} = 0$$

TEOR Se f è diff. in $x_0 \in A \subset \mathbb{R}^n$ aperto, $f : A \to \mathbb{R}^m$

allora:

① f è cont. in x_0

② Inoltre $\forall v \in \mathbb{R}^n$ esiste

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x_0) = df(x_0)v \in \mathbb{R}^m$$

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x_0) = df(x_0)\,v \in \mathbb{R}^m$$

Dim

(1) $f(x) = f(x_0) + df(x_0)(x - x_0) + E_{x_0}(x)$

$x \to x_0$: $f(x) \to f(x_0)$, $\quad x - x_0 \to 0$, $\quad E_{x_0}(x) \to 0$

$f(x_0)$

(2) $v \in \mathbb{R}^n$

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x_0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0+tv) - f(x_0)}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\left(df(x_0)(tv) + E_{x_0}(x_0+tv) \right)$$

$$= \lim_{t\to 0}\left(df(x_0)(v) + \frac{\overset{o(t)}{E_{x_0}(x_0+tv)}}{t} \right)$$

$$= df(x_0)(v) + 0 \qquad \square$$

$$E_{x_0}(x) = o(|x - x_0|) \quad x \to x_0$$

OSS $m = 1$, $v = \sum_{i=1}^{n} v_i e_i \quad v_i \in \mathbb{R}$

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x_0) = df(x_0)(v)$$

$$= df(x_0)\left(\sum_{i=1}^{n} v_i e_i\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} v_i\, df(x_0)(e_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)$$

$$= \langle v, \nabla f(x_0) \rangle$$

formula vera se f è diff.

OSS $(m = 1)$ sia $|v| = 1$ C-S

OSS $(m=1)$ Sia $|v|=1$ C-S

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x_0) = \langle v, \nabla f(x_0)\rangle \leq$$

$$\leq |v| \cdot |\nabla f(x_0)|$$

$$= |\nabla f(x_0)|$$

Ma allora

$$|\nabla f(x_0)| = \max_{|v|=1} \frac{\partial f}{\partial v}(x_0)$$

con massimo raggiunto con la scelta

$$v = \frac{\nabla f(x_0)}{|\nabla f(x_0)|}.$$

OSS 3 Test della differenziabilità.

Nel caso $m=1$

$$df(x_0)(x-x_0) = \langle \nabla f(x_0), x-x_0\rangle$$

Allora f è diff se risulta

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)-\langle \nabla f(x_0), x-x_0\rangle}{|x-x_0|} = 0$$

Procedo così:

- calcolo il gradiente.
- controllo il limite.

OSS 4 Identificazione fra differenziale e matrice Jacobiana

Sia $f: A \to \mathbb{R}^m$ $m \geq 1$ diff. nel punto $x_0 \in A$.

Sia $T = df(x_0) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$.

A questa T è associata la matrice

$$(T_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}} \quad \text{matrice } m \times n.$$

Allora

$$T_{ij} = \langle T e_j, e_i\rangle$$

$$= \langle df(x_0)(e_j), e_i \rangle$$

$$= \left\langle \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0), e_i \right\rangle$$

$$= \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_0)$$

Quindi possiamo identificare

$$df(x_0) \equiv Jf(x_0).$$

Se $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

$$\Downarrow$$

$Jf(x_0)$ è $n \times n$

$$\boxed{\det Jf(x_0) \neq 0}$$

$\Longrightarrow f$ invertibile

DEF (Piano t_g al grafico)

Sia $f : A \to \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}^n$, una funzione diff. nel punto $x_0 \in A$.

Sappiamo che

$$f(x) = f(x_0) + \langle \nabla f(x_0), x - x_0 \rangle + \underset{x_0}{E}(x)$$

Errore piccolo

Allora il grafico della funzione affine

$$\varphi(x) = f(x_0) + \langle \nabla f(x_0), x - x_0 \rangle$$

$x \in \mathbb{R}^n$

si dice piano tangente affine al grafico di f nel punto $(x_0, f(x_0))$

Come insieme

$$\text{piano } t_g = \{ (x, \varphi(x)) \in \mathbb{R}^{n+1} : x \in \mathbb{R}^n \}$$

L'equazione del piano sarà:

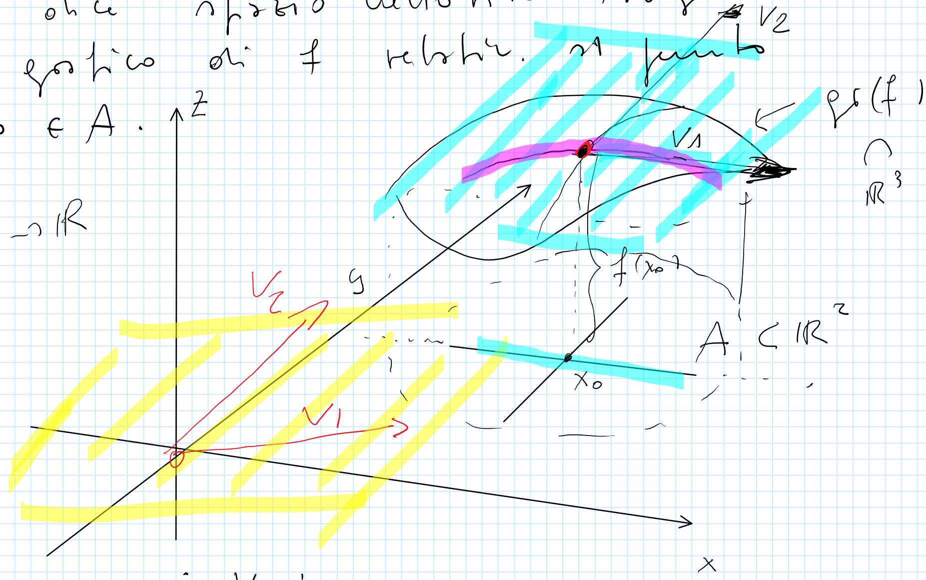
$$x_{n+1} = \varphi(x) = f(x_0) + \langle \nabla f(x_0), x - x_0 \rangle$$

Altro punto di vista:
Definiamo i vettori

$$v_j = \left(\boxed{e_j}, \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0) \right) \qquad j = 1, \dots, n$$

$$v_j \in \mathbb{R}^{n+1}$$

sono linearmente indipendenti
Lo spazio vettoriale n-dimensionale generato da $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^{n+1}$ si dice spazio vettoriale tangente al grafico di f relativo al punto $x_0 \in A$.



Genesi di v_1:

$$\gamma_1(t) = (a+t, b, f(a+t, b))$$

$$x_0 = (a, b) \in A$$

$$V_1 = \dot{\gamma}_1(t)\Big|_{t=0} = \Big(\underbrace{1, 0}_{= e_1}, \frac{\partial f}{\partial x}(x_0) \Big)$$

ES 1 (calcolare tutti gli $m, n \in \mathbb{N} = \{1, 2 \dots\}$ tali che la funzione $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^m y^n}{x^2 + y^2} & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0 & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$

(1) abbia tutte le derivate direzionali in $0 \in \mathbb{R}^2$

(2) sia diff. nel punto $0 \in \mathbb{R}^2$

Sol. (1) $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$, $v \neq 0$, avremo

$$\frac{1}{t}\Big(f(tv) - \underbrace{f(0)}_{=0}\Big) = \frac{1}{t}\,\frac{(tv_1)^m (tv_2)^n}{t^2 v_1^2 + t^2 v_2^2} =$$

$$= t^{m+n-2-1}\,\frac{v_1^m v_2^n}{v_1^2 + v_2^2}$$

Devono esistere finite

$$\frac{\partial f}{\partial v}(0) = \lim_{t \to 0} t^{\boxed{m+n-3}}\,\frac{v_1^m v_2^n}{v_1^2 + v_2^2}$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{se } m+n > 3 \\ \dfrac{v_1^m v_2^n}{v_1^2 + v_2^2} & m+n = 3 \\ \text{Non esiste finito} & m+n < 3 \end{cases}$$

Quindi

$\frac{\partial f}{\partial v}(0)$ esiste $\forall v \iff m+n \geq 3$.

(2) Osservo che $m+n = 3$ $\qquad v = (1,0)$

$$\frac{\partial f}{\partial v}(0) = \frac{v_1^m v_2^n}{v_1^2 + v_2^2}$$

Se f fosse diff. in 0, avremmo

deve essere

$$v \longmapsto \frac{\partial f}{\partial v}(0) = \langle \nabla f(0), v \rangle$$

Osservo che

$$v \longmapsto \frac{\partial f}{\partial v}(0) = \quad \text{NON è lineare}$$

Quindi f NON è diff. in 0!

Rimane il caso $m+n > 3$

(Ricordo che $m, n \geq 1$)

Avremo

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0) = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(0) = 0 \implies \nabla f(0) = (0,0)$$

Devo verificare se

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - \overset{0}{f(0)} - \langle \overset{0}{\nabla f(0)}, (x,y)\rangle}{\sqrt{x^2+y^2}} \overset{?}{=} 0$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^m y^n}{(x^2+y^2)^{3/2}} \overset{?}{=} 0$$

se $m+n > 3$

Stime

$$0 \leq \left| \frac{x^m y^n}{(x^2+y^2)^{3/2}} \right| = \frac{|x|^m |y|^n}{(x^2+y^2)^{3/2}} \leq$$

$$\leq \frac{(x^2)^{\frac{m}{2}} (y^2)^{\frac{n}{2}}}{(x^2+y^2)^{3/2}} \leq$$

$$\leq \frac{(x^2+y^2)^{\frac{m}{2}} (y^2+x^2)^{\frac{n}{2}}}{(x^2+y^2)^{3/2}} =$$

$$= (x^2+y^2)^{\frac{m}{2}+\frac{n}{2}-\frac{3}{2}}$$

$$= (x^2+y^2)^{\frac{m+n-3}{2}} \xrightarrow{(x,y)\to 0} 0$$

perché $m+n > 3$.

Altro conto:

$$x = r\cos\theta$$
$$y = r\sin\theta$$

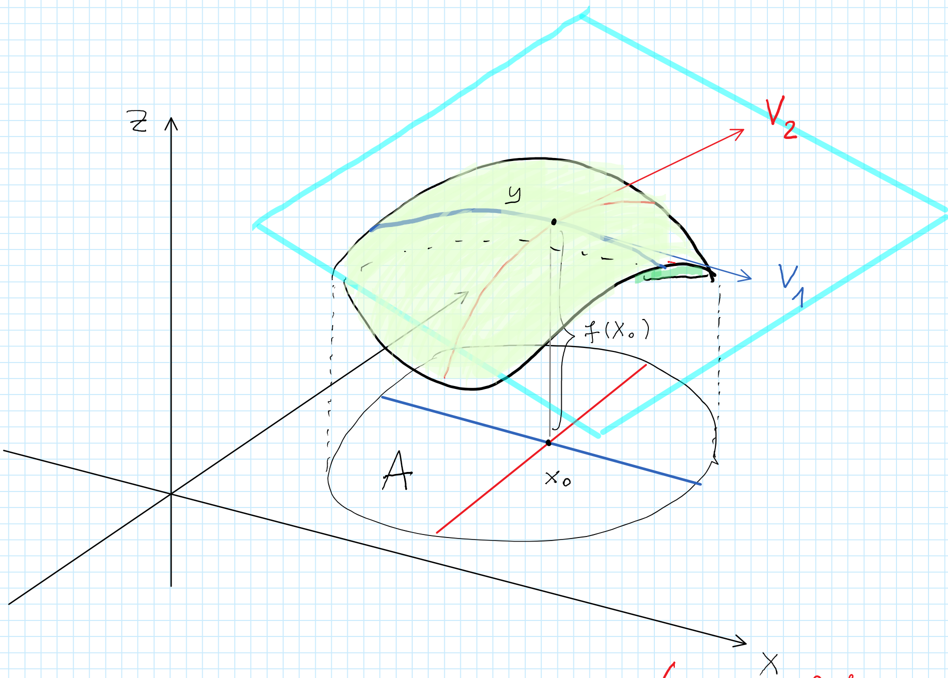
Trovo

$$\frac{|x|^m\,|y|^n}{(x^2+y^2)^{3/2}} = \frac{r^m\,|\cos\theta|^m\, r^n\,|\sin\theta|^n}{r^3}$$

$$= r^{m+n-3}\,|\cos\theta|^m\,|\sin\theta|^n \xrightarrow{r\to 0^+} 0$$

stima indip. da θ $\leq r^{m+n-3} \xrightarrow{r\to 0} 0$

Per $m+n>3 \Rightarrow f$ è differenziabile in $\underline{0}$.



$$V_1 = \left(1, 0, \frac{\partial f}{\partial x}(x_0)\right) \qquad V_2 = \left(0, 1, \frac{\partial f}{\partial y}(x_0)\right)$$

$$f : A \longrightarrow \mathbb{R}, \quad A \subset \mathbb{R}^2$$