Lezione 22

venerdì 6 maggio 2016 08:27

- f differenziabile $\Rightarrow$ f continua
  $\Rightarrow$ f ha tutte le deriv. direzionali

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x_0) = df(x_0)(v)$$

ES1 Sia $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 y^2}{x^4+y^6} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

① Provare che f è cont. in $(0,0)$

② Stabilire se f è diff. in $(0,0)$

① $$0 \leq \left| \frac{x^3 y^2}{x^4+y^6} \right| = \frac{\left(|x|^4\right)^{\frac{3}{4}} \left(|y|^6\right)^{\frac{1}{3}}}{x^4+y^6} \leq$$

$$\leq \frac{(x^4+y^6)^{\frac{3}{4}} (x^4+y^6)^{\frac{1}{3}}}{x^4+y^6} =$$

$$= (x^4+y^6)^{\frac{3}{4}+\frac{1}{3}-1} \leftarrow \text{è positivo}$$

$$\frac{3}{4}+\frac{1}{3}-1 = \frac{9+4}{\ } - 1$$

4 3 12

$$= \frac{13}{12} - 1 = \frac{1}{12} > 0$$

$(x,y) \to 0 \iff x^4 + y^6 \to 0$

Per confronto

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3 y^2}{x^4+y^6} = 0 = f(0)$$

② Calcolo le derivate parziali

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0) - \overset{0}{\overset{\|}{f(0,0)}}}{x} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$$

$$\Longrightarrow \nabla f(0,0) = (0,0)$$

Se f fosse diff. in (0,0) allora dovrebbe essere

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - \overset{0}{\overset{\|}{f(0,0)}} - \underbrace{\langle \nabla f(0,0), (x,y)\rangle}_{\overset{0}{\|} \; = df(0,0)(x,y)}}{|(x,y)|} \overset{?}{=} 0$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \boxed{\frac{x^3 y^2}{(x^2+y^2)^{1/2}(x^4+y^6)}} \overset{?}{=} 0$$

$$(x,y)\to(0,0) \quad \boxed{(x^2+y^2)^{1/2}(x^4+y^6)}$$

Test delle rette: $y = mx$ con $x \to 0$

$m \in \mathbb{R}$ parametro fissato

$$\boxed{} = \frac{x^3\, m^2 x^2}{(x^2+m^2x^2)^{1/2}\,(x^4+m^6x^6)}$$

$$= \frac{x^5 \cdot m^2}{|x|\,(1+m^2)^{1/2}\,|x|^4\,(1+m^6x^2)}$$

$$= \frac{x^5}{|x|^5} \cdot \frac{m^2}{(1+m^2)^{1/2}\,(1+m^6x^2)}$$

$$\downarrow$$

$$\frac{m^2}{\sqrt{1+m^2}}$$

Quindi il limite NON esiste

$\Downarrow$

f NON è diff. in $(0,0)$.

ES 2 $\quad f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = \left(x^3+y^3\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$f(x,y) = \left(x^3 + y^3\right)^{3}$$

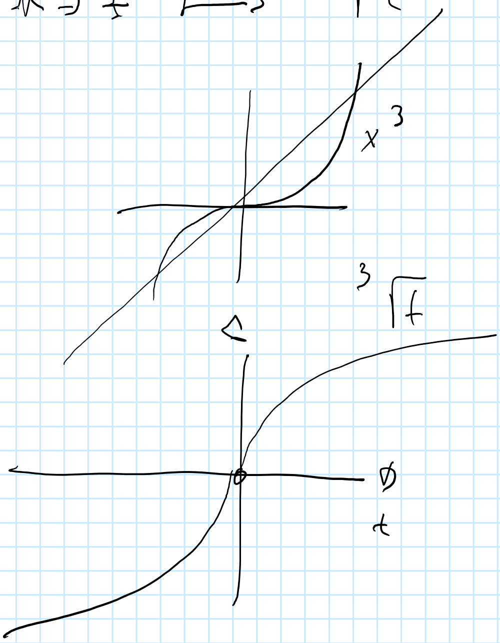
① Dire se f è cont.

② Calcolare, se esistono, le derivate direzionali $(0,0) \in \mathbb{R}^2$

③ Dire se f è diff. in $(0,0)$.

Sol. ①

• $\mathbb{R} \ni t \longmapsto \sqrt[3]{t}$ è ben definita $\forall\, t \in \mathbb{R}$ ed è cont.



• $(x,y) \longmapsto x^3$ cont.

• $(x,y) \longmapsto y^3$

$\Downarrow$

$(x,y) \longmapsto x^3 + y^3$ è cont.

Conclusione

$(x,y) \longmapsto \sqrt[3]{x^3 + y^3}$ è cont. su tutto $\mathbb{R}^2$.

② Derivate parziali in $(0,0)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(t,0) - f(0,0)}{t}$$

$\sqrt[3]{}$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{\sqrt[3]{t^3}}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{t}{t} = 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 1$$

Derivate direzionali:

$v \in \mathbb{R}^2$, $\quad v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2 \quad v \neq 0$

$$\frac{\partial f}{\partial v}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(tv) - \overbrace{f(0,0)}^{=0}}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{\left((tv_1)^3 + (tv_2)^3\right)^{1/3}}{t}$$

$$= \sqrt[3]{v_1^3 + v_2^3}$$

Osserviamo che in effetti f è 1-omogenea

$$f(tv) = t\, f(v)$$

3 Osserviamo che

$$v \longmapsto \frac{\partial f}{\partial v}(0,0) = \sqrt[3]{v_1^3 + v_2^3}$$

NON È lineare.

NON È LINEARE.

Quindi f non è diff. in $(0,0)$.

Infatti se lo fosse dovrebbe essere FALSO

$$\sqrt{v_1^3 + v_2^3} = \frac{\partial f}{\partial v}(0,0) = df(0)\, v$$

$$= \langle \nabla f(0), v \rangle$$

$$= \langle (1,1), v \rangle$$

$$= v_1 + v_2$$

Impossibile

(Non è vero $\forall v$)

ES 3 Calcolare il piano tangente in un generico punto della superficie n-dimensionale

$$M = \{ (x, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : x_{n+1}^2 - |x|^2 = 1 \}$$

$M \subset \mathbb{R}^{n+1}$

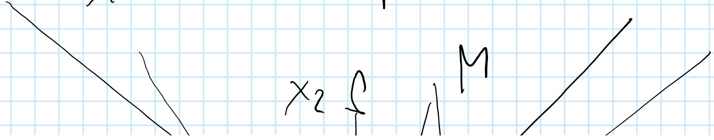
Sol. Se fosse $n=1$ allora $M \subset \mathbb{R}^2$ di espressione

$$x_2^2 - x_1^2 = 1$$

È una iperbole $x_2^2 = 1 + x_1^2$

$$x_2 = \pm \sqrt{1 + x_1^2}$$

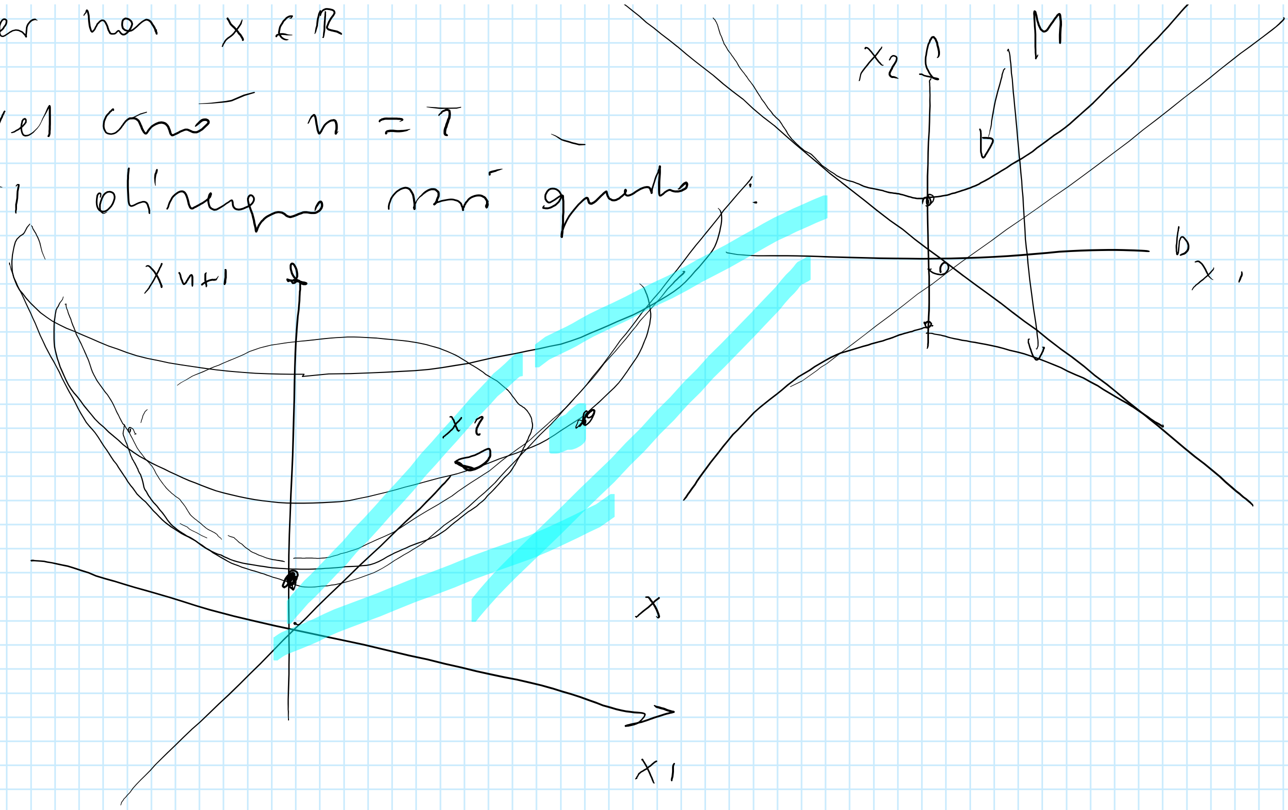
Per noi $x \in \mathbb{R}^n$



Per ogni $x \in \mathbb{R}$

Nel caso $n = 2$

Il disegno sarà questo:



M è un iperboloide a 2 falde di rotazione.

Conti: $x_{n+1}^2 - |x|^2 = 1$

$$\Updownarrow$$

$$x_{n+1}^2 = 1 + |x|^2$$

$$x_{n+1} = \pm\sqrt{1 + |X|^2}$$

Dunque dette

$$f(x) = \sqrt{1 + |x|^2}$$

$$g(x) = -\sqrt{1 + |x|^2} \qquad x \in \mathbb{R}^n$$

avremo

$$M = gr(f) \cup gr(g)$$

Esaminiamo f.

Fisso $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $(x_0, f(x_0)) \in gr(f) \in M$

Il piano tangente affine al $gr(f)$ in x_0 è il grafico di $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

$$g(x) = f(x_0) + \langle \nabla f(x_0), x - x_0 \rangle$$

Dunque una equazione cartesiana per lo sp. T_f (affine) è

$$x_{n+1} = f(x_0) + \overline{\langle \nabla f(x_0), x - x_0 \rangle}$$

(x, x_{n+1}) sono tutti e soli i punti dello sp. T_p.

Conti:

$$f(x) = \sqrt{1 + |x|^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(1 + x_1^2 + \dots + x_n^2\right)^{1/2}$$

$$= \frac{1}{2} \frac{1}{(\dots)^{1/2}} \cdot 2 x_i$$

$$= \frac{x_i}{}$$

$$= \sqrt{1 + |x|^2}$$

$$\nabla f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+|x|^2}} \, x$$

Quindi l'eq. per il primo iperpiano

$$x_{n+1} = \underset{\substack{\| \\ f(x_0)}}{\sqrt{1+|x_0|^2}} + \left\langle \frac{x_0}{\sqrt{1+|x_0|^2}}, \underset{\substack{\uparrow \\ \text{variabile}}}{x} - x_0 \right\rangle$$

$$= \sqrt{1+|x_0|^2} + \frac{1}{\sqrt{1+|x_0|^2}} \underbrace{\langle x_0, x - x_0 \rangle}_{\langle x_0, x\rangle - |x_0|^2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+|x_0|^2}} \left(1 + \cancel{|x_0|^2} + \langle x_0, x \rangle - \cancel{|x_0|^2} \right)$$

$$= \frac{1 + \langle x_0, x \rangle}{\sqrt{1+|x_0|^2}}$$

Riordino

$$\sqrt{1+|x_0|^2} \, x_{n+1} - \langle x_0, x \rangle = 1$$

Differenziale della funzione composta

① Differenziale della somma

$A \subset \mathbb{R}^n$ aperto, $x_0 \in A$ $\quad n, m \geq 1$

$f, g : A \to \mathbb{R}^m$ siano due funz. diff. in x_0.

Allora $f + g : A \to \mathbb{R}^m$ è diff. in x_0 e inoltre

$$d(f+g)(x_0) = df(x_0) + dg(x_0)$$

② Differenziale del prodotto

$f, g : A \to \mathbb{R}$ diff. in $x_0 \in A$

Allora $f \cdot g : A \to \mathbb{R}$ è diff. in x_0 e inoltre

$$d(f \cdot g)(x_0) = f(x_0)\, dg(x_0) + g(x_0)\, df(x_0)$$

Verifica

$$f(x) = f(x_0) + \boxed{df(x_0)(x - x_0)} + F_{x_0}(x)$$

$$\frac{F_{x_0}(x)}{|x - x_0|} \quad x \to x_0$$

$$g(x) = g(x_0) + dg(x_0)(x - x_0) + G_{x_0}(x)$$

$$\frac{G_{x_0}(x)}{|x - x_0|} \longrightarrow 0 \quad x \to x_0$$

Moltiplico

Moltiplico

$$\frac{x_0}{|x - x_0|} \xrightarrow[x \to x_0]{} 0$$

$$f(x) \cdot g(x) = f(x_0)\, g(x_0) + f(x_0)\, dg(x_0)(x - x_0) +$$

$$+ f(x_0)\, G_{x_0}(x)$$

$$+ g(x_0)\, df(x_0)(x - x_0)$$

$$+ df(x_0)(x - x_0)\, dg(x_0)(x - x_0) \leftarrow H$$

$$+ df(x_0)(x - x_0)\, G_{x_0}(x)$$

$$+ F_{x_0}(x) \cdot \left(g(x_0) + dg(x_0)(x - x_0) + G_{x_0}(x) \right)$$

$$= f(x_0)\, g(x_0) + \left(f(x_0)\, dg(x_0) + g(x_0)\, f(x_0) \right)(x - x_0)$$

$$+ H_{x_0}(x) \leftarrow \text{tutto il resto}$$

$$\frac{H_{x_0}(x)}{|x - x_0|} \xrightarrow[x \to x_0]{} 0 \quad \text{ok.}$$

TEOR (Diff. della funzione composta)

$A \subset \mathbb{R}^n$ aperto, $x_0 \in A$, $f : A \to \mathbb{R}^m$ diff. in x_0

$B \subset \mathbb{R}^m$ aperto, $f(A) \subset B$, $g : B \to \mathbb{R}^k$ diff. in $f(x_0) \in B$

Allora la funzione composta $g \circ f : A \to \mathbb{R}^k$ è differenziabile in $x_0 \in A$ e inoltre

$$d(g \circ f)(x_0) = dg(f(x_0)) \circ df(x_0)$$

$$d(g\circ f)(x_0) = dg(f(x_0)) \circ df(x_0)$$

$$\underset{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^k)}{\cap} \qquad \underset{\mathcal{L}(\mathbb{R}^m;\mathbb{R}^k)}{\cap} \qquad \underset{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m)}{\cap}$$

In termini di matrici Jacobiane avremo

$$\underbrace{J(g\circ f)(x_0)}_{\substack{k \times n \\ \text{matrice}}} = \underbrace{Jg(f(x_0))}_{\substack{k \times m \\ \text{matrice}}} \underbrace{Jf(x_0)}_{\substack{m \times n \\ \text{matrice}}}$$

prodotto di matrici righe × colonne

Thm