Lezione 27

martedì 17 maggio 2016 12:27

ES 1 Sia $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 2y^2 \le 2\}$

e sia $f : K \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^2 + xy + 2y^2$.

Determinare l'insieme immagine $f(K) \subset \mathbb{R}$.

Sol. K è limitato perché

$$K \subset [-\sqrt{2}, \sqrt{2}] \times [-1, 1]$$

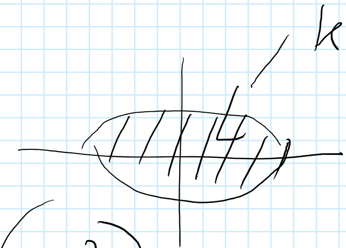
K è chiuso:

$$h(x,y) = x^2 + 2y^2 - 2 \quad \text{continua}$$

$$K = h^{-1}(\underbrace{(-\infty, 0]}_{\text{chiuso}}) \quad \text{chiuso di } \mathbb{R}^2$$

$$\Downarrow$$

K è compatto



Siccome $f(x,y) = x^2 + xy + 2y^2$ è cont.

$$\Downarrow$$

$f(K)$ è compatto in $\mathbb{R}$

TEOR W. $\Rightarrow \exists\, x_0, x_1 \in K$ t.c.

$m = f(x_0) = \min f(K)$ e $M = f(x_1) = \max f(K)$

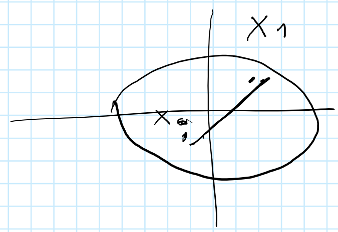
con $m, M \in \mathbb{R}$.

e quindi

$$f(K) \subset [m, M] \subset \mathbb{R}$$
$$= ?$$

x_1

$= ?$



Sia $\gamma(t) = t x_1 + (1-t) x_0$

K è convesso:

$$\gamma(t) \in K \quad \forall\, t \in [0,1]$$

e inoltre

$$\varphi(t) = f(\gamma(t)) \qquad t \in [0,1]$$

$$\varphi : [0,1] \to \mathbb{R} \text{ è cont.}$$

$$\varphi(1) = f(x_1) = M$$

$$\varphi(0) = f(x_0) = m$$

Abbiamo provato che (con il teor. dei valori intermedi)

$$f(K) = [m, M]$$

Ora calcolo m, M.

Cerco i p.ti critici di f in K

$$f_x(x,y) = 2x + y$$

$$f_y(x,y) = x + 4y$$

$$\nabla f(x,y) = (0,0) \iff \begin{cases} 2x + y = 0 \\ x + 4y = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

Quindi $(0,0)$ è l'unico p.to critico

Calcolo la matrice Hessiana

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\det Hf = 8 - 1 = 7 > 0$$

$$\operatorname{tr} Hf = 6 > 0$$

Deduco che
$$\left.\begin{array}{l} Hf(0,0) > 0 \\ \nabla f(0,0) = (0,0) \end{array}\right\} \Rightarrow (0,0) \text{ è un punto di min loc. stretto}$$

Ora studio f su $\partial K = \{x^2 + 2y^2 = 2\}$

Parametrizzo ∂K in questo modo

$$x = \sqrt{2}\cos\theta \qquad \theta \in [0, 2\pi]$$
$$y = \sin\theta$$

Quindi considero

$$\varphi(\theta) = f(\sqrt{2}\cos\theta, \sin\theta), \quad \theta \in \ldots$$

$$= 2\cos^2\theta + \sqrt{2}\sin\theta\cos\theta + 2\sin^2\theta$$

$$= 2 + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin(2\theta)$$

$$= 2 + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin(2\theta)$$

$$\theta \in [0, 2\pi)$$

g prende il max per

$$\sin(2\theta) = 1$$

il min per

$$\sin(2\theta) = -1$$

$$\max_K f = \max_{\partial K} f = 2 + \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\min_{[0,2\pi)} g = 2 - \frac{\sqrt{2}}{2} > 0$$

Ma $f(0,0) = 0 < 2 - \frac{\sqrt{2}}{2}$

Quindi

$$\min_K f = 0 \qquad (0,0) \text{ unico p.to di min assoluto}$$

$\square$

<u>ES 2</u> Sia $p > 0$ un parametro e consideriamo

$$K_p = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x|^{2p} + |y|^{2p} \le 1 \}$$

Sia poi $f : K_p \to \mathbb{R}$ $f(x,y) = x^3 \cdot y^3$.

(1) Dimostrare che esistono

$$m_p = \min_{K_p} f \in \mathbb{R}$$

$$M_p = \max_{K_p} f$$

② Calcolare m_p ed M_p.

Sol. ① K_p è chiuso $h(x,y) = |x|^{2p} + |y|^{2p} - 1$ cont

$K_p = h^{-1}((-\infty, 0])$

K_p è limitato

$K_p \subset [-1,1] \times [-1,1]$.

$\Downarrow$

K_p compatto

f cont. su K_p $\Downarrow$ TW Esistono m_p, M_p

② T.W. $\exists\, x_0, x_1 \in K_p$:

$$f(x_0) = m_p$$
$$f(x_1) = M_p$$

Cerco p.ti critici

$$f_x(x,y) = 3x^2y^3$$
$$f_y(x,y) = 3x^3y^2$$

$$\nabla f(x,y) = (0,0) \iff \begin{cases} 3x^2y^3 = 0 \\ 3x^3y^2 = 0 \end{cases}$$

$$\iff xy = 0$$

$$\iff x = 0 \text{ op } y = 0$$

I due assi sono tutti e soli i p.ti critici di f.

In questi punti

$$f(x,y) = x^3 y^3 = 0$$

Siccome f assume valori > 0 e < 0 questi punti non sono punti di estremo neanche locale.

Vediamo che i punti di min/max sono tutti su $\partial K_p = \{ |x|^{2p} + |y|^{2p} = 1 \}$

Restringo f a ∂K_p.

Siccome K_p è simmetrico

$$f(-x,y) = f(x,-y) = -f(x,y)$$

Posso restringere lo studio al 1° quadrante dove $x \geq 0$ e $y \geq 0$.

Parametrizzo $\partial K_p \cap$ 1° quadrante

$$\begin{cases} x = (\cos\theta)^{\frac{1}{p}} \\ y = (\sin\theta)^{\frac{1}{p}} \end{cases} \qquad \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$\varphi(\theta) = f\left((\cos\theta)^{\frac{1}{p}}, (\sin\theta)^{\frac{1}{p}}\right) = (\cos\theta)^{\frac{3}{p}} (\sin\theta)^{\frac{3}{p}}$$

$$= (\cos\theta \sin\theta)^{\frac{3}{p}}$$

$$3/ \quad (\quad (\quad)) \frac{3}{p}$$

$$= 2^{-3/p} \left(\sin(2\theta) \right)^{\frac{\quad}{p}}$$

Quindi

$$\max_{\theta \in [0, \pi/2]} G(\theta) = 2^{-\frac{3}{p}}$$

e viene preso quando $\sin 2\theta = 1$

$$\Updownarrow$$

$$2\theta = \frac{\pi}{2}$$

$$\Updownarrow$$

$$\theta = \frac{\pi}{4}$$

Quindi

$$\max_{K_p} f = 2^{-\frac{3}{p}}$$

$$\min_{K_p} f = -2^{-\frac{3}{p}}.$$

$\square$

ES 3

Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = e^{3x} - 3y e^{x} + y^3 .$$

Calcolare tutti i p.ti critici di f e dire se sono p.ti di min/max locale/globale.

Sol. Gradiente

$$f_x = 3e^{3x} - 3y e^{x}$$

$$f_y = -3e^x + 3y^2$$

Sistema

$$\nabla f(x,y) = (0,0) \iff \begin{cases} e^{3x} - y\,e^x = 0 \\ -e^x + y^2 = 0 \end{cases}$$

dalla 2^ eq: $e^x = y^2$

sost. nella 1^ eq:

$$y^3(y^3-1) = y^6 - y^3 = 0$$

trovo 2 sol. $y=0$ e $y=1$

nella sopra $y=0 \longrightarrow -e^x = 0$

No soluz.

" " $y=1 \longrightarrow e^x = 1$

$\Updownarrow$

$x=0$

c'è un unico p.to critico che è $(0,1)$

$$f_x = 3e^{3x} - 3y\,e^x$$

$$f_y = -3e^x + 3y^2$$

Matrice Hessiana

$$\begin{pmatrix} 9e^{3x} - 3y\,e^x & -3e^x \\ & \end{pmatrix}$$

$$Hf(x,y) = \begin{bmatrix} & \\ -3e^x & 6y \end{bmatrix}$$

$$Hf(0,1) = \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\operatorname{tr} Hf(0,1) = 12 > 0$$

$$\det Hf(0,1) = 36 - 9 > 0$$

Quindi

$$Hf(0,1) > 0$$

$$\Downarrow$$

$(0,1)$ è un p.to di min locale stretto.

Domanda: è anche un p.to di min assoluto?

$$f(x,y) = e^{3x} - 3y\,e^{x} + y^3$$

Osserviamo che

$$\lim_{y \to -\infty} f(x,y) = -\infty$$

Quindi $(0,1)$ NON è un p.to di min. modulo

Promemoria sulle funzioni convesse

DEF Diciamo che $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ con $f \in C^2(\mathbb{R}^n)$ è convessa su $\mathbb{R}^n$ se $Hf(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$.

TEOR Sia $f \in C^2(\mathbb{R}^n)$ convessa su $\mathbb{R}^n$ e sia $x_0 \in \mathbb{R}^n$.

Sono equivalenti:

(A) x_0 è un p.to di minimo globale

(B) x_0 è un p.to critico.

Dim. (B) $\Rightarrow$ (A) parte interessante

Dato $x \in \mathbb{R}^n$ $\exists z \in [x_0, x]$

$$f(x) = f(x_0) + \langle \nabla f(x_0), x - x_0 \rangle + \frac{1}{2} \langle Hf(z)(x-x_0), x-x_0 \rangle$$

$\nabla f(x_0) = 0$, $Hf(z) \geq 0$

$$\geq \qquad \geq 0 \qquad \geq 0$$

$$f(x) \geq f(x_0) \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

$\square$

ES 4

Sia $\alpha \in \mathbb{R}$ un parametro e sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = e^{x+y} + x^2 + \alpha xy + y^2$$

i) Determinare tutti gli $\alpha \in \mathbb{R}$ per cui f è convessa su $\mathbb{R}^2$

ii) Per ciascun $\alpha \in [-2,2]$ discutere esistenza e unicità di p.ti di minimo per f.

Sol

i) f è convessa su $\mathbb{R}^2 \iff Hf \geq 0$ su $\mathbb{R}^2$

Conti:

$$f_x = e^{x+y} + 2x + \alpha y \quad \leftarrow$$

$$f_y = e^{x+y} + \alpha x + 2y \quad \leftarrow$$

$$f_{xx} = e^{x+y} + 2$$

$$f_{xy} = e^{x+y} + \alpha$$

$$f_{yx} = \uparrow$$

$$f_{yy} = e^{x+y} + 2$$

Dunque

$$Hf(x,y) = \begin{bmatrix} e^{x+y}+2 & e^{x+y}+\alpha \\ e^{x+y}+\alpha & e^{x+y}+2 \end{bmatrix}$$

Traccia $\forall x, y$

$$\operatorname{tr} Hf(x,y) = 2\left(e^{x+y}+2\right) > 4$$

$$\det Hf(x,y) = \left(e^{x+y}+2\right)^2 - \left(e^{x+y}+\alpha\right)^2$$

$$= e^{x+y}(4-2\alpha) + 4 - \alpha^2$$

$$= e^{x+y}\, 2(2-\alpha) + (2-\alpha)(2+\alpha)$$

$$= (2-\alpha)\left[2e^{x+y} + \alpha + 2\right]$$

Trova tutti e soli gli $\alpha \in \mathbb{R}$ per cui

$Hf(x,y) \geq 0 \quad \forall (x,y)$

Ovvero tutti e soli gli $\alpha \in \mathbb{R}$ tali che

$$(2-\alpha)\left[2e^{x+y} + \alpha + 2\right] \geq 0$$

$$(2-\alpha)\left[\,2e^{x+y} + (\alpha+2)\right] \geq 0 \quad \forall x,y\in\mathbb{R}$$

Vedo subito che deve essere

$$2-\alpha \geq 0 \iff \alpha \leq 2$$

$\alpha = 2 \to$ ok

Studio $\underline{\underline{\alpha < 2}}$

Vedo che se $\alpha + 2 < 0$ allora esisto

$$[\ ,,,\ ] < 0 \quad \text{per } x,y \text{ opportuni.}$$

Quindi deve essere $\alpha + 2 \geq 0$

$$\Updownarrow$$

$$\underline{\underline{\alpha \geq -2}}$$

Conclusione:

f è convessa su $\mathbb{R}^2 \iff -2 \leq \alpha \leq 2$.