Lezione 28

venerdì 20 maggio 2016 08:49

(Vol. Did.)

Conclusione Esercizio

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $\quad f(x,y) = e^{x+y} + x^2 + \alpha xy + y^2$

con $\alpha \in [-2, 2]$

((i) $\to$ f è convessa su $\mathbb{R}^2$)

(ii) Studiare: punti critici / min / max di f. (Al variare di α)

- Se (x,y) è un p.to critico $\left.\begin{matrix} \\ f \text{ convessa} \end{matrix}\right\} \Rightarrow$ (x,y) è un p.to di min assoluto.

Cerco i p.ti critici di f:

$$f_x = e^{x+y} + 2x + \alpha y$$

$$f_y = e^{x+y} + \alpha x + 2y$$

$$\nabla f(x,y) = (0,0) \iff \begin{cases} \underline{e^{x+y}} + 2x + \alpha y = 0 & (1) \\ \underline{e^{x+y}} + \alpha x + 2y = 0 & (2) \end{cases}$$

Sottraendo membro a membro le 2 eq.:

$$2x + \alpha y - (\alpha x + 2y) = 0$$

$$(2-\alpha)x + (\alpha - 2)y = 0$$

$$(2-\alpha)(x-y) = 0$$

- $\alpha = 2$. L'ultima eq. è verif. $\forall x, y$

Il sistema si riduce a

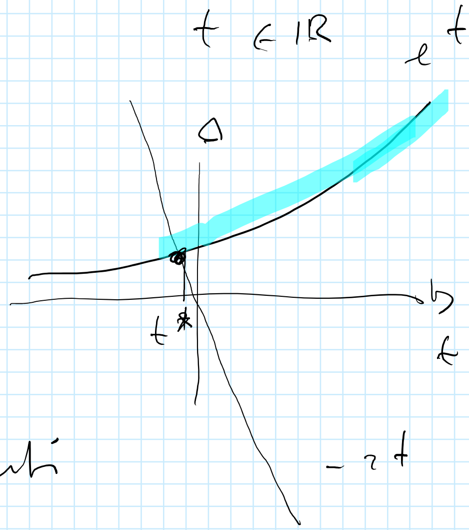
Il sistema si riduce a

$$e^{x+y} + 2(x+y) = 0$$

Chiamo $t = x+y$ e trovo

$$e^{t} + 2t = 0 \qquad t \in \mathbb{R}$$

$$e^{t} = -2t$$



Esiste unica una soluzione

$$t^* < 0 .$$

Quindi $\alpha = 2$ tutti i punti (x,y) tali che

$$x+y = t^*$$

sono p.ti critici di f e quindi anche p.ti di min assoluto.

- $-2 \leq \alpha < 2$, l'eq. $(2-\alpha)(x-y) = 0$ implica $x = y$.

Prendo la 1^ Eq. del sistema che diventa

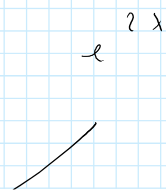
$$e^{2x} + 2x + \alpha x = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$e^{2x} + x(2+\alpha) = 0 , \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\Updownarrow$$

$$e^{2x} = -(2+\alpha)x$$

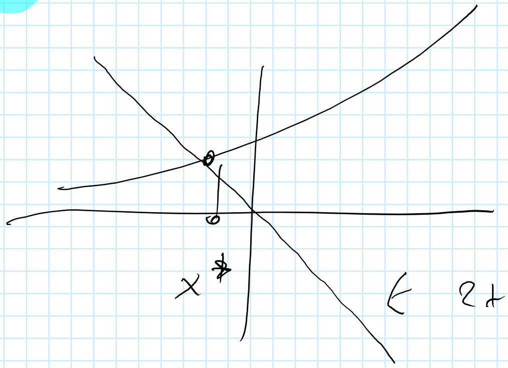


• Se $\alpha = -2$ allora

siamo

$$e^{2x} = 0$$

non ha soluzione.



$\Leftarrow\ 2+\alpha \neq 0$

Concludo:

Se $\alpha = -2$ f non ha p.t. critici

• $-2 < \alpha < 2$ allora l'equ. $e^{2x} = -(2+\alpha)x$

ha una soluzione unica $\underline{\underline{x^* < 0}}$

Concludo che

$\alpha \in (-2, 2)$ f ha un unico punto critico $(x^*, x^*) \in \mathbb{R}^2$ con $x^* < 0$

□

Penultimo Capitolo

1 - Forme differenziali in $\mathbb{R}^n$

Premessa di Algebra lineare

$\mathbb{R}^n$ è uno spaz. vett.

Fisso la base standard $e_1, \dots, e_n$

$$e_i = (0 \dots 0 \underset{i}{1} 0 \dots 0) \quad i = 1, \dots, n$$

Lo spazio duale di $\mathbb{R}^n$ è $(\mathbb{R}^n)^* = \mathcal{L}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R})$

$$= \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$$

$= \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$

La base duale di $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ associata alla base $e_1, \dots, e_n$ di $\mathbb{R}^n$ è uno sp. vettoriale.

si indica con $dx_1, \dots, dx_n \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$

che sono definiti così:

$$dx_i(e_j) = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

Prendiamo ora una generica $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$

avremo

$$T = a_1\, dx_1 + \dots + a_n\, dx_n$$

per opportuni $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$.

Allora avremo, dato $\underset{\mathbb{R}^n}{\overset{}{v}} = \sum_{j=1}^{n} v_j e_j$, $v_j \in \mathbb{R}$

avremo

$$T(v) = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\, dx_i\right)\left(\sum_{j=1}^{n} v_j e_j\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_i v_j\, dx_i(e_j)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_i v_i \qquad \left(= \langle a, v \rangle \right).$$

DEF Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ un insieme aperto.

Una applicazione $\omega : A \longrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$

si dice 1-forma differenziale su A.

Commento Nella basi standard avremo
$$\omega = \sum_{i=1}^{n} \omega_i(x)\, dx_i$$
$$x \in A$$
dove $\omega_1, \dots, \omega_n : A \to \mathbb{R}$ sono funzioni

Se queste funzioni $\omega_i \in C(A)$ sono cont. su A diremo che ω ha coeff. cont. e scriveremo $\omega \in \Omega(A)$

Se poi queste funzioni $\omega_i \in C^1(A)$ diremo che ω è di classe $C^1(A)$ e scriveremo $\omega \in \Omega^1(A)$.

Commento Sia $f \in C^1(A)$ allora $\forall x \in A$ avremo $df(x) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$

Quindi
$x \mapsto df(x)$ è una 1-forma differenziale.

Quindi avremo
$$\boxed{df(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(x)}{\partial x_i}\, dx_i} \qquad v = \sum_{j=1}^{n} v_j e_j$$

infatti
$$\frac{\partial f}{\partial v}(x) = df(x)\,v \overset{?}{=} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(x)}{\partial x_i}\, dx_i(v)$$
$$dx_i(v) = v_i$$
$$= \langle \nabla f(x), v \rangle$$
$$= \langle \nabla f(x), v \rangle$$

DEF (Forma esatta) Diciamo che $\omega \in \Omega(A)$, $A \subset \mathbb{R}^n$, è una

$\omega \in \Omega(A)$, $A \subset \mathbb{R}^n$, è una 1-forma esatta se esiste $f \in C^1(A)$ tale che $df = \omega$.
Chiamiamo f il (un) potenziale di ω.

DEF Sia $\omega \in \Omega^1(A)$ una 1-forma del tipo
$$\omega = \sum_{i=1}^{n} \omega_i(x)\, dx_i$$
$$\omega_i \in C^1(A).$$

Diremo che ω è chiusa se:
$$\frac{\partial \omega_i}{\partial x_j} = \frac{\partial \omega_j}{\partial x_i} \quad \text{su } A$$
$$\forall i,j = 1,\dots,n.$$

Commento Se ω è esatta allora è chiusa.

Dim. $\omega = \sum_{i=1}^{n} \omega_i(x)\, dx_i$ e avremo
$$\omega = df = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\, dx_i$$

Quindi
$$\omega_i(x) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \qquad \text{con } f \in C^2$$

e dunque
$$\frac{\partial \omega_i}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial f}{\partial x_i} \qquad \text{Teor. Schwarz}$$
$$= \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j}$$

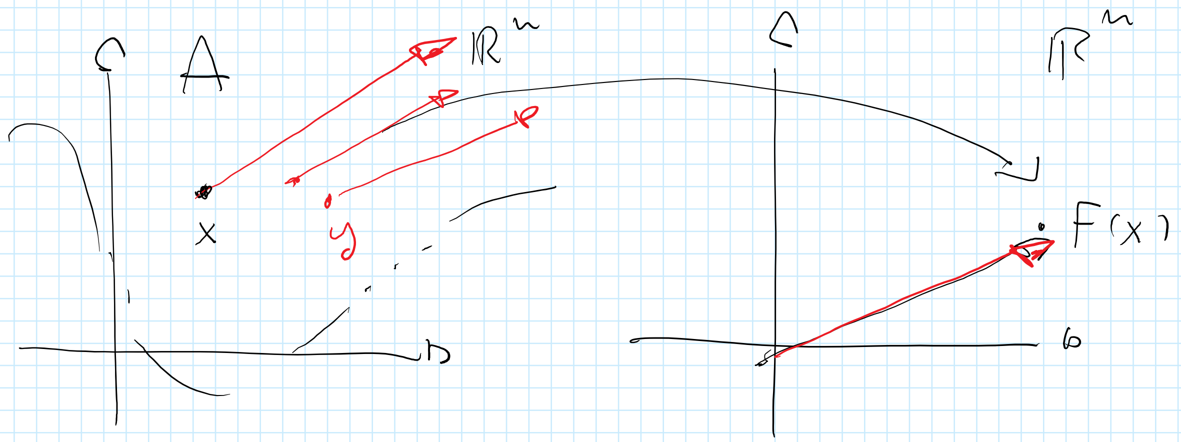
$$= \frac{\partial \omega_j}{\partial x_i}$$

Domanda: È vero che ω chiusa $\Downarrow$ ω esatta ?

Non sempre. Dipende dall'insieme A.

Osservazione: 1-forme e campi vettoriali.

Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ un ins. aperto.
Una funzione $F : A \to \mathbb{R}^n$
la chiamiamo campo vettoriale:



ORA data 1-forma $\omega = \sum \omega_i dx_i$
posso associare il campo vettoriale

$$F = (\omega_1, \dots, \omega_n)$$

Viceversa dal un campo $F = (F_1, \dots, F_n)$
posso associare la 1-forma

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} F_i \, dx_i .$$

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} F_i \, dx_i \, .$$

Dire che ω è esatta ovvero $\exists f$ tale che $df = \omega$ significa dire che il campo associato $F = (F_1 \ldots F_n)$ è di "tipo gradiente"

$$F_1 = \omega_1, \quad F_n = \omega_n$$

ovvero $\exists f : A \to \mathbb{R}$ tale che

$$F(x) = \nabla f(x) \, , \quad x \in A \, .$$

Integrazione di 1-forme lungo curve

$A \subset \mathbb{R}^n$ ins. aperto

DEF L'integrale di una 1-forma $\omega \in \Omega(A)$ lungo una curva (regolare) $\gamma \in C^1([0,L]; A)$ si definisce in questo modo:

$$\int_\gamma \omega = \underbrace{\int_\gamma \omega(T) \, ds}_{\text{integr. curv.}}$$

dove $T = \dot\gamma / |\dot\gamma|$ è il vettore unitario tangente a γ.

Commenti $\omega = \sum \omega_i(x) \, dx_i$

Poi

$$\omega(T) = \omega\left(\frac{\dot\gamma}{|\dot\gamma|}\right) = \frac{1}{|\dot\gamma|} \, \omega(\dot\gamma)$$

n

$$= \frac{1}{|r'|} \sum_{i=1} \omega_i (r(t)) \, r_i'(t)$$

Poi per la def. di integr. curv.:

$$\int_\gamma \omega = \int_\gamma \omega(T) \, ds$$

$$= \int_0^L \frac{1}{|r'(t)|} \sum_{i=1}^n \omega_i (r(t)) \, r_i'(t) \, |r'(t)| \, dt$$

$$= \boxed{\sum_{i=1}^n \int_0^L \omega_i (r(t)) \, r_i'(t) \, dt}$$

Ha senso anche nei punti dove $|r'(t)| = 0$.