Lezione 29

lunedì 23 maggio 2016 12:32

Integrazione di 1-forme

$$\int_\gamma \omega := \int_\gamma \omega(T)\, ds$$

Nel punto $\gamma(t)$ della curva c'è il versore tangente $T = \frac{\gamma'}{|\gamma'|}(t)$

Nel p.to $\gamma(t)$ c'è ω con i suoi coeff.

Quindi $\omega(T(t))$

calcolato nel p.to $\gamma(t)$

Quando $\omega = \sum_{i=1}^{n} \omega_i(x)\, dx_i$

$$\int_\gamma \omega := \sum_{i=1}^{n} \int_0^L \omega_i(\gamma(t))\, \gamma_i'(t)\, dt$$

Def (curva inversa) Data $\gamma : [0,L] \to \mathbb{R}^n$ definiamo $(-\gamma) : [0,L] \to \mathbb{R}^n$

$$(-\gamma)(t) = \gamma(L-t), \quad t\in[0,L]$$

Def (Concatenazione)

Date $\gamma : [0,L] \to \mathbb{R}^n$

$\eta : [0,M] \to \mathbb{R}^n$

con $\gamma(L) = \eta(0)$.

Allora possiamo definire la concatenazione $(\gamma+\eta) : [0, L+M] \to \mathbb{R}^n$

$$(\gamma+\eta)(t) = \gamma(t) \qquad 0 \le t \le L$$

$$(\gamma+\eta)(t) = \eta(t-L), \qquad L \le t \le L+M$$

Proposizione Sia ω una 1-forma e siano γ, η come sopra. Allora:

1) $$\int_{-\gamma} \omega = -\int_{\gamma} \omega$$

2) $$\int_{\gamma+\eta} \omega = \int_{\gamma} \omega + \int_{\eta} \eta$$

TEOR 1 Sia $\omega \in \Omega(A)$ con $A \subset \mathbb{R}^n$ insieme aperto.

Sono equivalenti:

A) ω è esatta in A

B) P... $\gamma \in C^1([0,L]; A)$

...,

B) Per ogni $\gamma \in C^1([0,L]; A)$ l'integrale

$$\int_\gamma \omega$$

dipende solo da $\gamma(0)$ e $\gamma(L)$, e non da percorso. Precisamente

$$\int_\gamma \omega = f(\gamma(L)) - f(\gamma(0))$$

dove f è un potenziale.

C) Per ogni $\gamma \in C^1([0,L]; A)$ chiusa si ha

$$\int_\gamma \omega = 0$$

<u>Dim</u> A) $\Rightarrow$ B)

Sia ω esatta con $\omega = df$ $f \in C^1(A)$. Allora $\forall \gamma \in C^1([0,L]; A)$

$$\int_\gamma \omega = \sum_{i=1}^n \int_0^L \omega_i(\gamma(t))\, \dot\gamma_i(t)\, dt$$

$$= \sum_{i=1}^n \int_0^L \frac{\partial f}{\partial x_i}(\gamma(t))\, \dot\gamma_i(t)\, dt$$

[illegible]

$$= \int_0^L \langle \nabla f(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle \, dt$$

$$= \int_0^L \frac{d}{dt} \left(f(\gamma(t)) \right) dt$$

$$= f(\gamma(L)) - f(\gamma(0))$$

B) ⇒ C) Tesi: γ chiusa ⇒ $\int_\gamma \omega = 0$

posto che valga B

C) ⇒ B) Ipotesi: $\int_\gamma \omega = 0$ $\forall \gamma$ chiusa

Siano ora γ e $\varkappa$ due curve con stessi punti iniziale e finale.

Allora

$\gamma + (-\varkappa)$ è chiusa.

$$0 \overset{C)}{=} \int_{\gamma + (-\varkappa)} \omega = \int_\gamma \omega - \int_\varkappa \omega$$

B) ⇒ A) Devo trovare un potenziale per ω.

Fisso $x_0 \in A$. Posso supporre che ogni $x \in A$ si possa collegare con x_0 tramite una curva C^1 (a tratti).

tutta in A

Definiamo $f : A \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \int_{\gamma_x} \omega$$

dove γ_x è una curva C^1 a tratti tale che $\gamma_x(0) = x_0$

$$\gamma_x(L) = x$$

Per B) f non dipende dalla scelta di γ_x.

Affermo che $f \in C^1(A)$ e che

$$df = \omega$$

Conto:

Per $i = 1 \dots n$

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x+te_i) - f(x)}{t}$$

ora

$$f(x) = \int_{\gamma_x} \omega$$

$$f(x+te_i) = \int_{\gamma_x + [x, x+te_i]} \omega =$$

$$= \int_{\gamma_x} \omega + \int_{[x, x+te_i]} \omega$$

$$\parallel$$

$$f(x)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \lim_{t \to 0} \frac{\int_{[x, x+te_i]} \omega}{t}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \int_0^t \omega_i (x + s e_i)\, ds$$

è cont.

$$= \underset{\text{cont.}}{\omega_i (x)} = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$$

$$\Downarrow$$

$$\omega(x) = df(x)$$

e inoltre $f \in C^1(A)$

$\square$

Teorema di Poincaré

DTF Insieme Contraibile (Sempl.)

DEF ... (Cominciamo)

Un $A \subset \mathbb{R}^n$ aperto si dice contraibile

se esiste un p.to $x_0 \in A$

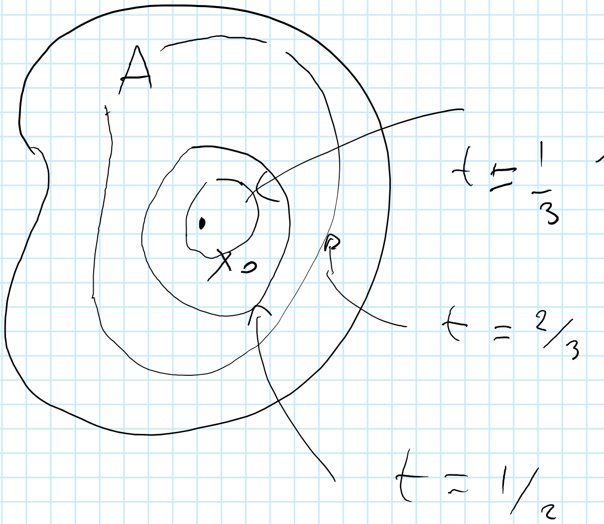
ed esiste $H \in C^\infty(A \times [0,1] ; A)$

tale che

$$H(x,1) = x$$
$$H(x,0) = x_0 .$$

Esempi

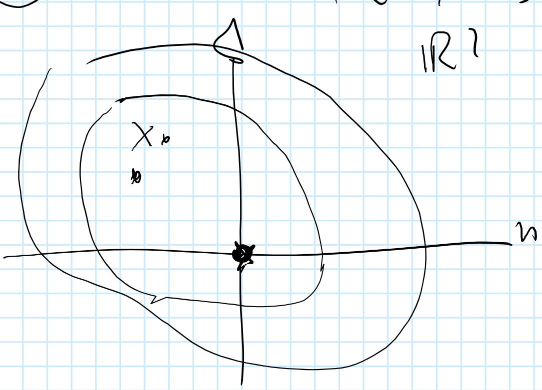
(1)



è contraibile

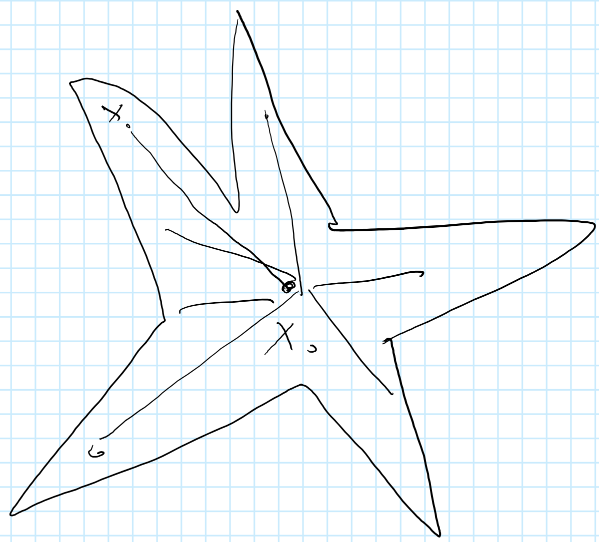
H "restringe" in modo cont. A fino a farlo diventare un p.to.

(2) $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ non è contraibile



③ Gli insiemi con buchi non sono contraibili.

DEF $A \subset \mathbb{R}^n$ si dice stellato se esiste $x_0 \in A$ tale che $[x_0, x] \subset A$ $\forall\, x \in A$.



Commento

A stellato $\Rightarrow$ A contraibile

Ad se $x_0 = 0 \in A$ allora

$$H(x,t) = t\,x.$$

Commento finale

A è convesso $\Rightarrow$ A stellato

$\Downarrow$

A contraibile.

TEOREMA Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ un aperto contraibile. Sono equiv. le seg. affermazioni

A) ω è chiusa in A.

B) ω è esatta in A.

Dim: A) $\Rightarrow$ B)

Si prende la funzione $H = H(x, t)$ la contr. ad 1 p.to

Si scrive $\gamma_x(t) = H(x, t)$ curva $\forall x$ fissato

Si definisce

$$f(x) = \int_{\gamma_x} \omega$$

Allora $df = \omega$ conto complicato.

ES 1 Sia $A = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \neq 0 \}$

ES 1 Sia $A = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x+y \neq 0 \}$

e sia $\omega \in \Omega^1(A)$ la 1-forma

$$\omega = \frac{y}{x^2+y^2}\,dx - \frac{x}{x^2+y^2}\,dy .$$

(i) Stabilire se ω è chiusa in A.

(ii) " " ω è esatta in A.

Sol.

(i) Cont.

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right) = \frac{x^2+y^2 - y \cdot 2y}{(x^2+y^2)^2}$$

$$= \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{-x}{x^2+y^2}\right) = -\frac{x^2+y^2 - x \cdot 2x}{(x^2+y^2)^2}$$

$$= \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$\Rightarrow$ ω è chiusa

(ii) Provo che ω NON è esatta in A $= \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$

Curva $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$
$t \in [0, 2\pi]$

$t \in [0, 2\pi]$

È chiusa

Calcolo:

$$\int_\gamma \omega = \int_0^{2\pi} \omega\left(\underbrace{\frac{\gamma'}{|\gamma'|}}_{=T}\right) |\gamma'| \, dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \omega(\gamma') \, dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\frac{\gamma_2(t)}{\gamma_1(t)^2 + \gamma_2(t)^2} \gamma_1'(t) - \frac{\gamma_1(t)}{\gamma_1(t)^2 + \gamma_2(t)^2} \gamma_2'(t) \right) dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\frac{\sin t}{1} (-\sin t) - \frac{\cos t}{1} \cos t \right) dt$$

$$\gamma = (\cos t, \sin t)$$

$$\gamma' = (-\sin t, \cos t)$$

$$= - \int_0^{2\pi} \sin^2 t + \cos^2 t \quad dt$$

$= - 2\pi \neq 0$

$\Downarrow$

ω NON è esatta in A

ES Sia ora $B = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0 \}$
Sia ω come sopra.

① Dimostrare che ω è esatta in B

② Calcolare un potenziale di ω in B

Sol,

① B è convesso, ω chiusa in B $\overset{\text{T. Poincaré}}{\Rightarrow}$ ω è esatta in B

② Devo trovare $f \in C^1(B)$ tale che

$$\begin{cases} f_x = \dfrac{y}{x^2+y^2} \\ f_y = -\dfrac{x}{x^2+y^2} \end{cases} \quad \text{in } B$$