Lezione 31

lunedì 30 maggio 2016 12:36

X spaz. completo
$T : X \to X$
$d(Tx, Ty) \leq \lambda\, d(x,y)$
$\forall x, y \in X$

$\exists\, 0 \leq \lambda < 1$

$\Rightarrow$ Esiste un unico $x \in X$ tale che $Tx = x$.

Dim Fisso un $x_0 \in X$ a piacere

definiamo

$$x_n = \underbrace{T \circ \dots \circ T}_{n \text{ volte}}(x_0) = T^n(x_0) \qquad n \in \mathbb{N}$$

Affermo che $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ è una successione di Cauchy in (X, d)

fissato $\varepsilon > 0$ cerco un $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che

$\forall n \geq \bar{n}$ $\forall k \in \mathbb{N}$ si abbia

$$d(x_{n+k}, x_n) \leq \varepsilon.$$

$$= d\left(T^{n+k}(x_0), T^n(x_0)\right)$$

$$= d\left(T\left(T^{n+k-1}(x_0)\right), T\left(T^{n-1}(x_0)\right)\right)$$

$$\leq \lambda\, d\left(T^{n+k-1}(x_0), T^{n-1}(x_0)\right)$$

$$\leq \lambda \, d(\quad , \quad)$$

$$\leq \lambda^n \quad (x_0) , \quad x_0)$$

$$d(T^k x_0, x_0) \leq d(x_0, Tx_0) + d(Tx_0, T^2 x_0) + \dots + d(T^{k-1} x_0, T^k (x_0))$$

$$= \sum_{h=0}^{k-1} d(T^h x_0, T^{h+1} x_0)$$

$$\leq \sum_{h=0}^{k-1} \lambda^h d(x_0, Tx_0)$$

$$\leq d(x_0, Tx_0) \sum_{h=0}^{\infty} \lambda^h$$

$\forall k \in \mathbb{N}$.

serie converge perché $\lambda < 1$

Dunque $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che $\forall n \geq \bar{n}$ si abbia

$$d(x_{n+k}, x_n) \leq \varepsilon$$

$\forall k \geq 0$.

Siccome $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ è di Cauchy e X è completo allora esiste x tale che

$$T^n(x_0) = x_n \xrightarrow[n \to \infty]{} x \in X.$$

Affermo che $Tx = x$ è un p.to fisso

$$x = \lim_{n \to \infty} T^n(x_0)$$

$$= \lim_{n \to \infty} \underline{\underline{T}} \left(T^{n-1}(x_0) \right)$$

$T : X \to X$ è cont.

$$= T \left(\lim_{n \to \infty} \underline{\underline{T^{n-1}(x_0)}} \right)$$

$$= T(x).$$

Sia infine $\bar{x} \in X$ un altro p.to fisso. Allora $T\bar{x} = \bar{x}$

Dunque

$$d(x, \bar{x}) = d(Tx, T\bar{x})$$

$$\le \lambda\, d(x,\bar{x})$$

$$\underbrace{(1-\lambda)}_{\substack{\vee\\ 0}} \; d(x,\bar{x}) \le 0$$

$$d(x,\bar{x}) \;\; \overset{\vee}{0}$$

$$\Downarrow$$

$$d(x,\bar{x}) = 0 \implies \bar{x} = x$$

$\square$

Teorema di invertibilità locale

Premessa: sia A matrice $n \times n$ reale e definiamo $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

$$f(x) = Ax.$$

Dato un $b \in \mathbb{R}^n$ consideriamo l'equazione

$$\boxed{f(x) = b} \qquad x \in \mathbb{R}^n.$$

Dall'algebra lineare sappiamo che se $\det A \neq 0$ allora l'equazione precedente ha un'unica soluzione ($\forall b \in \mathbb{R}^n$).

Il teorema di invertibilità studia il problema

$$f(x) = b$$

quando f è non-lineare.

DEF 1 (Diffeomorfismo)

Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ aperto. Una funzione $f: A \to \mathbb{R}^n$ si dice diffeomorfismo di classe C^k con $k \geq 1$ se

o) $f \in C^k(A; \mathbb{R}^n)$

i) $f: A \to f(A)$ è iniettiva (e suriettiva)

ii) $f(A) \subset \mathbb{R}^n$ è aperto

iii) $f^{-1} \in C^k(f(A); \mathbb{R}^n)$.

DEF 2 Diciamo che $f \in C^k(A; \mathbb{R}^n)$ con $A \subset \mathbb{R}^n$ aperto è un diffeomorfismo __locale__ di classe C^k se:

$\forall x \in A \ \exists \delta > 0$ tale che $f: B_\delta(x) \to f(B_\delta(x))$ è un diffeomorfismo.

di classe C^k.

TEOR (Invertib. locale).
Siano $A \subset \mathbb{R}^n$ aperto ed $f \in C^k(A;\mathbb{R}^n)$ $k \geq 1$. Sono equivalenti:

A) f è un diff. locale in A di classe C^k.

B) $\det(J_f(x)) \neq 0 \quad \forall x \in A$.

Dim. Rinviata.

ESEMPIO Si consideri il sistema di due equazioni nelle incognite $x, y \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} x + y \sin x = b_1 \in \mathbb{R} \\ x^2 y + \sin y = b_2 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Se $b = (b_1, b_2) \in \mathbb{R}^2$ fosse $b = 0$ il punto $(x,y) = (0,0)$ risolve il sistema.
Introduco la funzione $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} x + y \sin x \\ x^2 y + \sin y \end{pmatrix}$$

Chiaramente $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2;\mathbb{R}^2)$,
$f(0,0) = (0,0)$.
Calcolo la matrice Jacobiana:

Calcolo la matrice Jacobiana:

$$J_f(x,y) = \begin{pmatrix} 1 + y\cos x & \sin x \\ 2xy & x^2 + \cos y \end{pmatrix}$$

quindi

$$J_f(0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Dunque $\det J_f(0,0) = 1 \neq 0$

Dunque esiste $r > 0$ tale che

$$\det J_f(x,y) > 0 \quad \forall (x,y) \in B_\delta(0)$$

Dunque f è un diff. locale in $B_\delta(0)$.

Ma allora per il Teor. di inv. locale a meno di prendere $\delta > 0$ ancora più piccolo avremo:

$$f : B_\delta(0) \longrightarrow f(B_\delta(0))$$

è un diffeomorfismo di classe C^∞

Inoltre $f(B_\delta(0)) \subset \mathbb{R}^2$ è un aperto

e $0 = f(0) \in f(B_\delta(0))$

e $\quad 0 = f(0) \in f(B_\delta(0))$

Quindi $\exists\ \varepsilon > 0$ tale che

$$B_\varepsilon(0) \subset f(B_\delta(0)).$$

Conclusione: $\forall\, b \in B_\varepsilon(0)\ \exists\, (x,y) \in B_\delta(0)$

tale che

$$f(x) = b$$

è unico qui $\square$

TEOREMA (di Dini)

- Premessa di notazioni:

$p, q \in \mathbb{N} \quad p, q \geq 1 \quad$ e $\quad p + q = n \in \mathbb{N}$

$n \geq 2$

- $\mathbb{R}^n = \underset{x}{\mathbb{R}^p} \times \underset{y}{\mathbb{R}^q}$

- Abbiamo $f : \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \longrightarrow \mathbb{R}^q$

$$f = (f_1, \dots, f_q)$$

- Matrici Jacobiane parziali:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_p} \\ \vdots & & \\ \frac{\partial f_q}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_q}{\partial x_p} \end{pmatrix}$$

matrice $q \times p$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial y_q} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_q}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial f_q}{\partial y_q} \end{pmatrix}$$

matrice $q \times q$

TEOREMA Sia $A \subset \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ un aperto, sia $(x_0, y_0) \in A$ e sia $f \in C^k(A; \mathbb{R}^q)$ con $k \geq 1$. Supponiamo che

$$f(x_0, y_0) = 0 \quad e$$

$$\left[\det\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right) \neq 0 . \right]$$

Allora esistono $\varepsilon, \delta > 0$ ed esiste una funzione

$\varphi \in C^k (B_\delta (x_0) , B_\varepsilon (y_0))$

tale che :

i) $B_\delta (x_0) \times B_\varepsilon (y_0) \subset A$

ii) $\{ (x, \varphi(x)) \in \mathbb{R}^n : x \in B_\delta (x_0) \} =$

$= \{ (x,y) \in B_\delta (x_0) \times B_\varepsilon (y_0) : f(x,y) = 0 \}$

iii) la φ verifica :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x) = - \left(\frac{\partial f}{\partial y} (x, \varphi(x)) \right)^{-1} \cdot \frac{\partial f}{\partial x} (x, \varphi(x)) .$$

$x \in B_\delta (x_0)$.