

# Lezione 31

lunedì 30 maggio 2016 12:36

$X$  spaz. completo

$$T: X \rightarrow X$$

$$d(Tx, Ty) \leq \lambda d(x, y)$$

$$\forall x, y \in X$$

$\Rightarrow$

Esiste un unico

$$x \in X$$

tale che

$$\overline{Tx} = x.$$

$$\exists 0 < \lambda < 1$$

Dim Fisso in  $x_0 \in X$  a piacere

definiamo

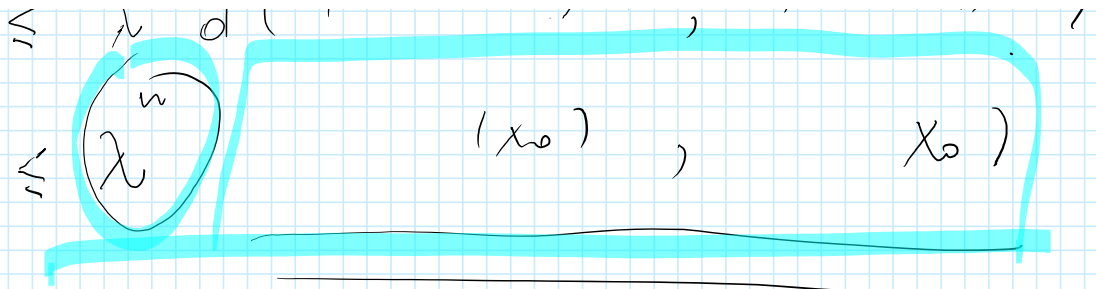
$$x_n = \underbrace{T \circ \dots \circ T}_{n \text{ volte}}(x_0) = T^n(x_0) \quad n \in \mathbb{N}$$

Affermo che  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  è una successione di Cauchy in  $(X, d)$

Fissato  $\varepsilon > 0$  cerchiamo un  $\bar{n} \in \mathbb{N}$  tale che  $\forall n \geq \bar{n} \quad \forall k \in \mathbb{N}$  si abbia

$$= d(x_{n+k}, x_n) \leq \varepsilon.$$

$$\begin{aligned} &= d(T^{n+k}(x_0), T^n(x_0)) \\ &= d(T(T^{n+k-1}(x_0)), T(T^{n-1}(x_0))) \\ &\leq \lambda d(T^{n+k-1}(x_0), T^{n-1}(x_0)) \end{aligned}$$



$$d(T^k x_0, x_0) \leq d(x_0, Tx_0) + d(Tx_0, T^2x_0) + \dots + d(T^{k-1}x_0, T^kx_0)$$

$$= \sum_{h=0}^{k-1} d(T^h x_0, T^{h+1} x_0)$$

$$\leq \sum_{h=0}^{k-1} \lambda^h d(x_0, Tx_0)$$

$$h=0$$

$$\leq d(x_0, Tx_0) \sum_{h=0}^{\infty} \lambda^h$$

$$\sum_{h=0}^{\infty} \lambda^h$$

$$\forall k \in \mathbb{N}$$

serie

converge

perché  $\lambda < 1$

dunque

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \tilde{n} \in \mathbb{N}$$

tale che

$$\forall n > \tilde{n} \forall m \in \mathbb{N}$$

risulta

$$d(x_{n+k}, x_n) \leq \varepsilon$$

$$\forall k > 0.$$

il lemma  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  è di Cauchy  
e  $X$  è completo allora  
esiste  $x$  tale che

$$T^n(x_0) = x_n \quad \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \quad x \in X.$$

Affermo che  $TX = \overset{\circ}{x}$  è un p.to  
fisso

$$\begin{aligned} x &= \lim_{n \rightarrow \infty} T^n(x_0) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} T(T^{n-1}(x_0)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T: X &\rightarrow X \\ \bar{x} \text{ cont.} & \\ &= T \left( \lim_{n \rightarrow \infty} T^{n-1}(x_0) \right) \\ &= T(x) \end{aligned}$$

Si suppone  $\bar{x} \in X$  un altro p.to  
fisso. Allora  $T\bar{x} = \bar{x}$

Però

$$d(x, \bar{x}) = d(Tx, T\bar{x})$$

$$\begin{aligned} & \leq \lambda d(x, \bar{x}) \\ & \underbrace{(1-\lambda)}_{\substack{\leq \\ 0}} d(x, \bar{x}) \leq 0 \\ & \Downarrow \\ & d(x, \bar{x}) = 0 \quad \bar{x} = x \quad \square \end{aligned}$$

## Teorema di invertibilità locale

Prendiamo sia  $A$  matrice  $n \times n$  reale  
e definita  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$

$$f(x) = Ax$$

Dato un  $b \in \mathbb{R}^n$  cerchiamo l'equazione

$$f(x) = b \quad x \in \mathbb{R}^n$$

Dall'algebra lineare sappiamo che  
se  $\det A \neq 0$  allora l'equazione

precedente ha un'unica soluzione  
( $\forall b \in \mathbb{R}^n$ ).

Il lemma di invertibilità risolve  
il problema

$$f(x) = b$$

quando  $f$  è non-lineare.

DEF 1 (Diffeomorfismo)

Sia  $A \subset \mathbb{R}^n$  aperto. Una funzione

$f: A \rightarrow \mathbb{R}^n$  si dice diffeomorfismo  
di classe  $C^k$  con  $k > 1$  se

i)  $f \in C^k(A; \mathbb{R}^n)$

ii)  $f: A \rightarrow f(A)$  è iniettivo  
(e suriettivo)

iii)  $f(A) \subset \mathbb{R}^n$  è aperto

iiii)  $f^{-1} \in C^k(f(A); \mathbb{R}^n)$ .

DEF 2 Diciamo che  $f \in C^k(A; \mathbb{R}^n)$

con  $A \subset \mathbb{R}^n$  aperto è un diffeomorfismo  
locale di classe  $C^k$  se:

$$\forall x \in A \exists \delta > 0 \text{ tale che } f: B_\delta(x) \rightarrow f(B_\delta(x)) \text{ è un diffeomorfismo}$$

di classe  $C^k$ .

TEOR (Invertib. locale).

Siano  $A \subset \mathbb{R}^n$  aperto ed  $f \in C^k(A; \mathbb{R}^n)$   
 $k \geq 1$ . Sono equivalenti:

A)  $f$  è un o.l.f. locale <sup>in</sup>  $A$  di classe  $C^k$ .

B)  $\det(J_f(x)) \neq 0 \quad \forall x \in A$ .

Dim. Rinviate.

ESEMPIO Si consideri il sistema di  
due equazioni nelle incognite  $x, y \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} x + y \sin x = b_1 \in \mathbb{R} \\ x^2 y + \sin y = b_2 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Se  $b = (b_1, b_2) \in \mathbb{R}^2$  fosse  $b = 0$

il punto  $(x, y) = (0, 0)$  risolve il sistema

Introduco la funzione  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$f(x, y) = \begin{pmatrix} x + y \sin x \\ x^2 y + \sin y \end{pmatrix}$$

Chiaramente  $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^2)$ ,

$f(0, 0) = (0, 0)$ .

Utile la matrice Jacobiana:

Calcolo la matrice Jacobiana:

$$J_f(x, y) = \begin{pmatrix} 1 + y \cos x & \sin x \\ 2xy & x^2 + \cos y \end{pmatrix}$$

quindi

$$J_f(0, 0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

dunque  $\det J_f(0, 0) = 1 \neq 0$

dunque esiste  $\bar{r} > 0$  tale che

$$\det J_f(x, y) > 0 \quad \forall (x, y) \in B_{\bar{r}}(0)$$

dunque  $f$  è un diff. locale su  $B_{\bar{r}}(0)$ .

Ma allora per il Teor. di inv. locale  
è necessario prendere  $\delta > 0$  ancora  
più piccolo avremo:

$$f: B_{\delta}(0) \longrightarrow f(B_{\delta}(0))$$

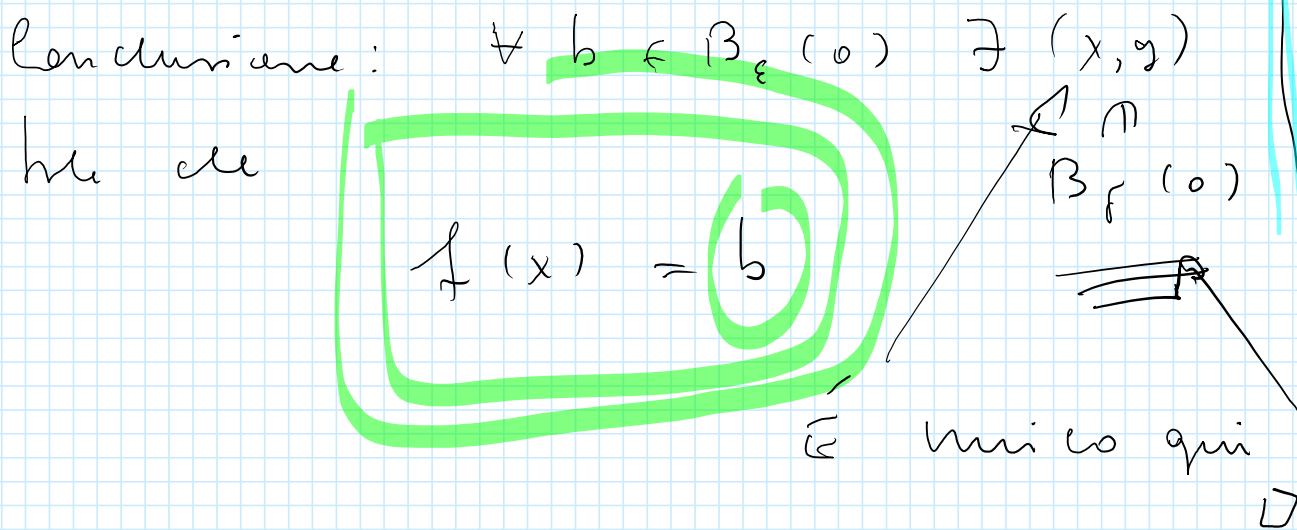
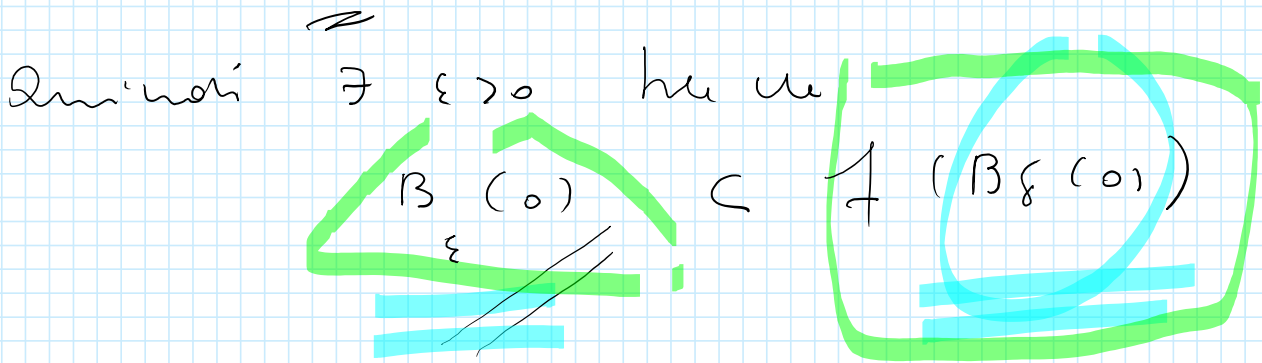
è un diffeomorfismo

di classe  $C^\infty$

E nella  $f(B_{\delta}(0)) \subset \mathbb{R}^2$  è un aperto

e.  $0 = f(0) \in f(B_{\delta}(0))$

$$e \quad 0 = f(0) \in f(B_f(0))$$



## TEOREMA (di Thiri)

• Premessa di notazioni:

$$p, q \in \mathbb{N} \quad p, q \geq 1 \quad e \quad p + q = n \in \mathbb{N} \quad n \geq 2$$

$$\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$$

$\downarrow$                        $\downarrow$   
 $x$                        $y$

• Abbiamo  $f: \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}^q$

$$f = (f_1, \dots, f_q)$$



• Matrici Jacobine parziali:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_p} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_q}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_q}{\partial x_p} \end{pmatrix}$$

matrice  $q \times p$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial y_q} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_q}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial f_q}{\partial y_q} \end{pmatrix}$$

matrice  $q \times q$

TEOREMA Siano  $A \subset \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$  un aperto  
 con  $(x_0, y_0) \in A$  e sia  $f \in C^k(A; \mathbb{R}^q)$   
 con  $k \geq 1$ . Supponiamo che

$$f(x_0, y_0) = 0$$

$$\left[ \det \left( \frac{\partial f}{\partial y} (x_0, y_0) \right) \neq 0 \right]$$

Allora esistono  $\varepsilon, \delta > 0$  ed esiste  
 una funzione

$$g \in C^k (B_\delta(x_0), B_\varepsilon(y_0))$$

he che :

$$i) B_\delta(x_0) \times B_\varepsilon(y_0) \subset A$$

$$ii) \{ (x, g(x)) \in \mathbb{R}^n : x \in B_\delta(x_0) \} =$$

$$= \{ (x, y) \in B_\delta(x_0) \times B_\varepsilon(y_0) : \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\}$$

$$f(x, y) = 0$$

iii) La  $g$  verifica:

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x) = - \left( \frac{\partial f}{\partial y}(x, g(x)) \right)^{-1} \cdot$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, g(x)).$$

$$x \in B_\delta(x_0).$$

