Lezione 32

martedì 31 maggio 2016 12:34

Teorema della funzione implicita.

$A \subset \mathbb{R}^2$ aperto

$(x_0, y_0) \in A$

Poi c'è una funzione $f : A \to \mathbb{R}$

Noi vogliamo capire come è fatto l'insieme

$$Z = \{ (x,y) \in A : f(x,y) = 0 \}$$

a partire dal fatto $f(x_0, y_0) = 0$

$(x_0, y_0) \in Z$.

Supponiamo che:

1. $f \in C^1(A)$
2. $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$.

Allora il Teorema della funz. implicita mi assicura che:

$\exists\, \delta > 0 \quad \exists\, \varepsilon > 0$

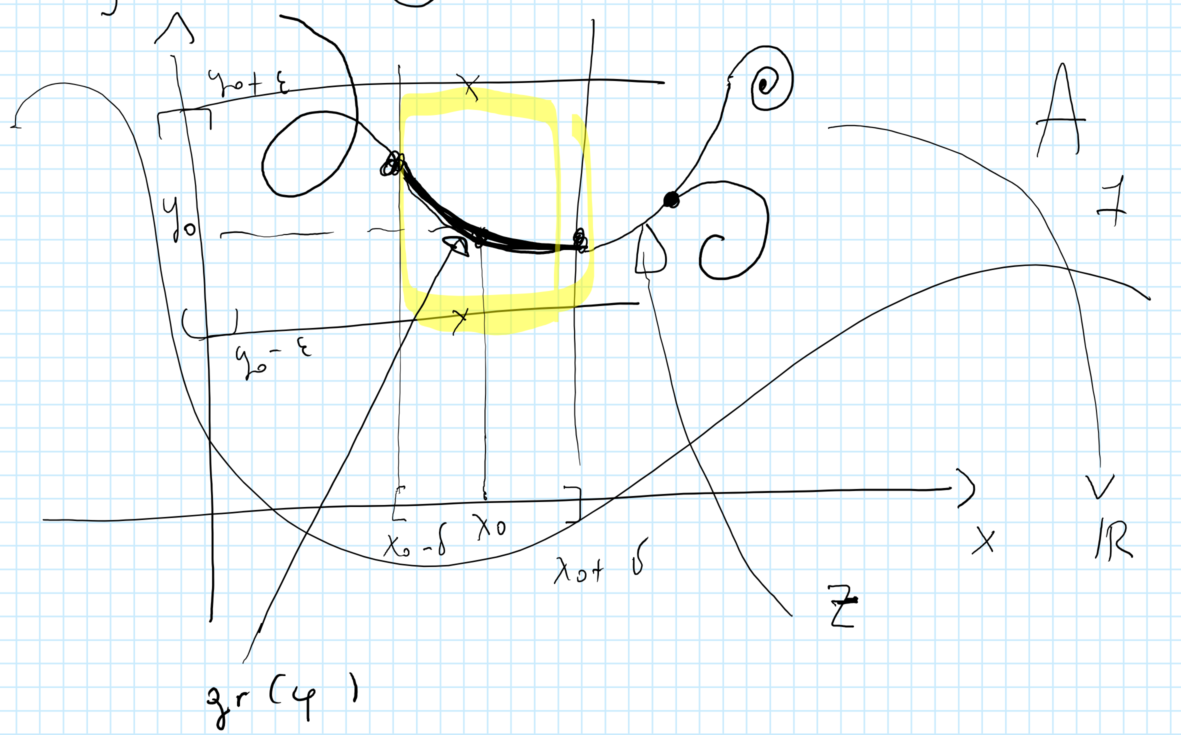
$\exists\, \varphi \in C^1([x_0 - \delta, x_0 + \delta]; [y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon])$

detta funzione implicitamente definita dalla equazione $f(x,y) = 0$

tale che

$$Z \cap \left([x_0 - \delta, x_0 + \delta] \times [y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon] \right) =$$

$= gr(\varphi) = \{ (x, \varphi(x)) \in \mathbb{R}^2 : x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \}$



Inoltre la derivata di φ è data da

$$\varphi'(x) = - \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x, \varphi(x))}{\frac{\partial f}{\partial y}(x, \varphi(x))}$$

Cenni di dimostrazione

Formula finale:

Osservo che

$$x \longmapsto f(x, \varphi(x)) \equiv 0 \quad \forall x \text{ intorno del } x_0$$

Derivo nella x:

$$0 = \frac{d}{\ } = \frac{d}{\ } \left[f(x, \varphi(x)) \right]$$

$$0 = \frac{d}{dx} 0 = \frac{d}{dx} \left[f(x, \underbrace{\varphi(x)}) \right]$$

$$= \left\langle \nabla f (x, \varphi(x)), (1, \varphi'(x)) \right\rangle$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x}(x, \varphi(x)) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, \varphi(x)) \cdot \varphi'(x)$$

$\forall x$

Then

$$\varphi'(x) = - \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x, \varphi(x))}{\frac{\partial f}{\partial y}(x, \varphi(x))}$$

Lemma della prova che φ esiste.

- $\left.\begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) > 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} \text{ è cont.} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) > 0$

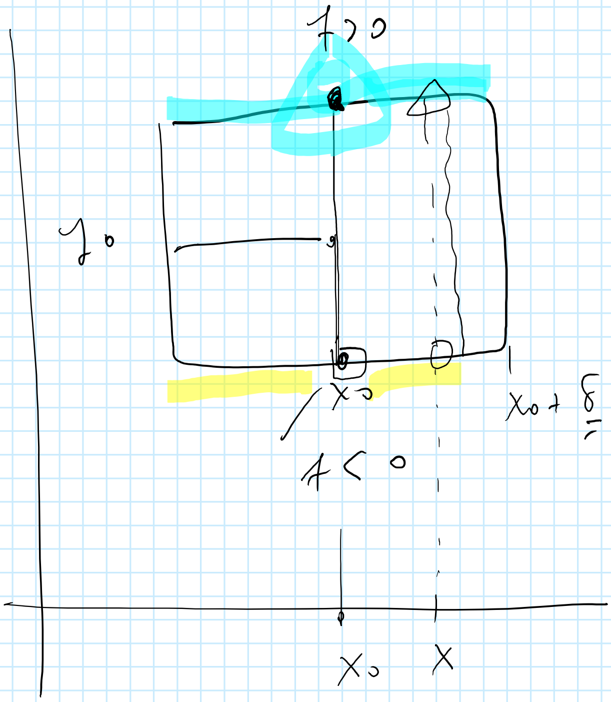
  $\forall (x, y) \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \times [y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon]$

- $y \mapsto f(x, y)$ è strett. crescente $\forall x$ fissato.

- $f(x_0, y_0) = 0 \Rightarrow f(x_0, y_0+\varepsilon) > 0$

  $f(x_0, y_0-\varepsilon) < 0$

- f è continua



$\Rightarrow f(x, y_0+\varepsilon) > 0$

$f(x, y_0-\varepsilon) < 0$

$\forall x \in [x_0-\delta, x_0+\delta]$

- Per il teorema dei valori intermedi

  $\forall x \in [x_0-\delta, x_0+\delta] \ \exists y_x \in [y_0-\varepsilon, y_0+\varepsilon]$
  tale che $f(x, y_x) = 0$.

- Per monotonia questo y_x è unico.

- Conclusione posso definire
  $\varphi : [x_0-\delta, x_0+\delta] \to [y_0-\varepsilon, y_0+\varepsilon]$

Ponendo
$$\varphi(x) = y_x$$

Avremo

$$Z \cap \text{Rettangolo} = gr(\varphi) .$$

ES. 1 Sia $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la funzione

$$f(x,y) = (x^2 - y^2, 2xy)$$

i) Det. il più grande aperto $A \subset \mathbb{R}^2$ tale che f sia un diffeomorfismo locale di classe C^∞ su A.

ii) Stabilire se f è un diffeomorfismo su A

iii) Dare esempi di insiemi aperti $B \subset A$ "il più grande possibile" tali che f sia un diffeomorfismo su B.

Soluzione.

i) f è un diff. loc. su A

$$\Updownarrow$$

$$\det(J_f(x,y)) \neq 0 \quad \forall (x,y) \in A$$

(Teor. di invert. locale).

Conti $f(x,y) = \begin{pmatrix} x^2-y^2 \\ 2xy \end{pmatrix}$

$$J_f(x,y) = \begin{pmatrix} 2x & -2y \\ 2y & 2x \end{pmatrix}$$

Il suo det è

$$\det(J_f(x,y)) = 4x^2 + 4y^2$$
$$= 4(x^2+y^2)$$

Quindi su

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \; : \; x^2+y^2 \neq 0\}$$

f è un diff. locale di classe C^∞

ii) $f(x,y) = \begin{pmatrix} x^2 - \\ 2xy \end{pmatrix}$

Esamino se f è iniettiva:

Osservo che

$$f(-x,-y) = f(x,y)$$

Quindi f non è iniettiva su A

iii) Compito per casa.

Controllare che su

$$B = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0 \}$$

$$f : B \to f(B) \subset \mathbb{R}^2$$

è un diffeomorfismo.

<u>Commento</u> $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \equiv \mathbb{R}^2$

$$f(z) = z^2$$

Scrivere f in coord. cartesiane.

<u>ES 2</u> Sia $A = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 + x + y > 0 \}$

e sia $f : A \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = \log(1 + x + y) - e^{x(1+y)} + 1$$

(1) Provare che l'eq. $f(x,y) = 0$ definisce implicitamente intorno $0 \in \mathbb{R}^2$ una funzione φ definita in un intervallo $(-\delta, \delta)$ per $\delta > 0$

(2) Esprimere φ' in funzione di φ e calcolare $\varphi'(0)$

(3) Calcolare $\varphi''(0)$.

Soluzione. Abbiamo

$$f(0,0) = \log(1) - e^{0} + 1$$
$$= 0 - 1 + 1 = 0$$

Calcolo le der. parziali di f

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{1+x+y} - e^{x(1+y)}(1+y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{1+x+y} - e^{x(1+y)}\, x$$

In $(0,0)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 1 - 1 = 0$$

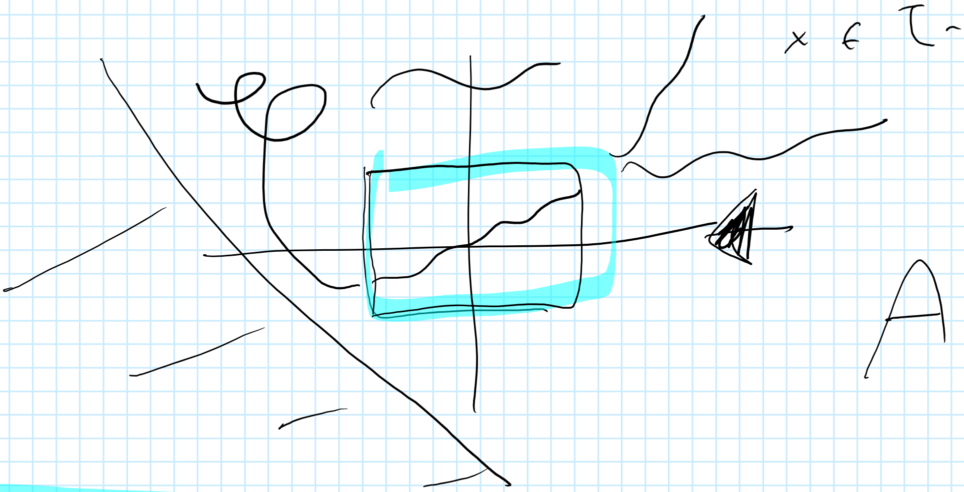
$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 1 - 0 = 1 \neq 0$$

$f \in C^{\infty}(A)$

Per il Teor. della funzione implicita esiste $\delta > 0$ esiste $\varphi \in C^{\infty}([\delta, \delta])$ tale che $\varepsilon > 0$

$$\{(x,y)\in A : (x,y)\in[-\delta,\delta]\times[-\varepsilon,\varepsilon] \text{ e } f(x,y)=0\} =$$

$$= \mathrm{gr}(\varphi) = \{(x,\varphi(x))\in\mathbb{R} : x\in[-\delta,\delta]\}$$



Sappiamo che

$$\varphi'(x) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x,\varphi(x))}{\frac{\partial f}{\partial y}(x,\varphi(x))}$$

$$= -\frac{1-(1+\varphi(x))(1+x+\varphi(x))e^{x(1+\varphi(x))}}{1-x(1+x+\varphi(x))e^{x(1+\varphi(x))}}$$

Calcolare $\varphi'(0)$.

Avremo chiaramente $\varphi(0)=0$

Trovo $1-1$

e trovo

$$\varphi'(0) = - \frac{1-1}{1-0}$$

$$= 0$$

(3) Calcolare $\varphi''(0)$.

Conto per ora:

usando $\varphi'(0) = 0$ $\quad \frac{\partial f}{\partial x}(0) = 0$

controllare che

$$\varphi''(0) = - \frac{f_{xx}(0,0)}{f_y(0,0)}$$

Poi trovo

$$f_{xx}(x,y) = - \frac{1}{(1+x+y)^2} - (1+y)^2 e^{x(1+y)}$$

e quindi trovo

$$\varphi''(0) = - \frac{-1-1}{+1}$$

$$= +2.$$

$\square$