Esercizi sulle serie numeriche

ES1 Al variare $\alpha > 0$ studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}\,\sin\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)}{n+1}.$$

Svolg. Osservo che si tratta di serie a termini positivi.

Idea: usare il Criterio del CA

Sul sin sappiamo

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

e quindi

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)}{\frac{1}{n^\alpha}} = 1$$

Quindi detto

$$a_n = \frac{\sqrt{n}\,\sin\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)}{n+1}$$

considero la succ. di confronto

$$b_n = \frac{1}{n^{1/2}} \cdot \frac{1}{n^\alpha} = \frac{1}{n^{\alpha + 1/2}}$$

In questo modo

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \to \infty} \frac{\sqrt{n}}{n+1}\,\sin\left(\frac{1}{n^\alpha}\right) \cdot \frac{1}{\frac{1}{n^{\alpha + 1/2}}}$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{n}{n+1} \cdot \frac{\sin\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)}{\frac{1}{n^\alpha}}$$

$$= 1 \cdot 1 = 1 \neq 0$$

Per il CCA:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty \iff \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha+1/2}} < \infty$$

$$n=1$$

$$\Leftrightarrow \alpha + \frac{1}{2} > 1$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\alpha > \frac{1}{2}}.$$

ES 2 Determinare tutti i valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ t.c. converga

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^3+1} - \sqrt{n^3-1}}{n^\alpha}.$$

Risol.

Serie a termini positivi.

Tool: criteri del confr.

Razionalizzo

$$\sqrt{n^3+1} - \sqrt{n^3-1} = \frac{\overset{2}{\cancel{n^3}+1 - (\cancel{n^3}-1)}}{\sqrt{n^3+1} + \sqrt{n^3-1}}$$

$$= \frac{2}{n^{3/2}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n^3}} + \sqrt{1-\frac{1}{n^3}}\right)}$$

Scelgo la succ. di confronto

$$b_n = \frac{1}{n^\alpha} \cdot \frac{1}{n^{3/2}} \quad \frac{1}{n^{\alpha+3/2}}$$

Ora

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{\frac{1}{n^\alpha}\frac{1}{n^{3/2}}}}{\cancel{\frac{1}{n^\alpha}\frac{1}{n^{3/2}}} \cdot \frac{1 \cdot 2}{\sqrt{1+1/n^3} + \sqrt{1-1/n^3}}}$$

$$= 1 \neq 0$$

Quindi

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha+3/2}} < \infty$$

$$\Leftrightarrow \alpha + 3/2 > 1$$

$\Leftrightarrow \quad \checkmark > -\frac{1}{2}.$

$\square$

ES. 3 Al variare di $x \in \mathbb{R}$ studiare la conv. della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}}{1+n+x^2 n^2}.$$

Risol. Termine gen. ≥ 0

Distinguiamo i casi ① $x = 0$ e ② $x \neq 0$

① $x = 0$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}}{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}} \overset{?}{=} \infty$$

infatti

$$\sqrt{n+1} \underset{n \geq 1}{\leq} \sqrt{2n} = \sqrt{2}\sqrt{n}$$

$$\frac{1}{\sqrt{n+1}} \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{n}} \quad \forall n \geq 1$$

Allora

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}} \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = \infty \text{ noto}$$

diverge per confronto $\Longleftarrow$

② $x \neq 0$. Converge. Stima:

$$1+n+x^2n^2 \geq x^2n^2 \quad \forall n \geq 1$$

$$\Downarrow$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}}{1+n+x^2n^2} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{2}\sqrt{n}}{x^2n^2} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{x^2} \sum_{n=1} \frac{1}{n^{3/2}} < \infty$$

Per confronto converge, $\frac{3}{2} > 1$.

anche la serie data $(x \neq 0)$.

$\square$

ES. 4 Al variare di $x \in \mathbb{R}$ e $k \in \mathbb{R}$ con $k \neq 0$ studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{|n-x|}{k}} =: a_n$$

Risol. Serie a termini positivi

Provo con il criterio della radice:

$$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{e^{-\frac{|n-x|}{k}}} = e^{-\frac{|n-x|}{k \cdot n}}$$

$$L = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} e^{-\frac{n-x}{k \cdot n}} = \lim_{n\to\infty} e^{-\frac{1-\frac{x}{n}}{k}} = e^{-\frac{1}{k}}$$

Crit. Radice:

① $L < 1 \Rightarrow$ Serie Converge

$L < 1 \Leftrightarrow e^{-\frac{1}{k}} < 1 \Leftrightarrow -\frac{1}{k} < 0 \Leftrightarrow k > 0$

② $L > 1 \Rightarrow$ Serie diverge

$L > 1 \Leftrightarrow k < 0$

Il caso $L = 1 \Leftrightarrow e^{-\frac{1}{k}} = 1$

Non c'è

Fine Discussione.

$\exists$

ES. 5 Discutere la conv. semplice della serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sqrt[3]{\sin\left(\frac{1}{n+1}\right)} \, (-1)^n .$$

Risoluzione. Osservo che

$$\sin\left(\frac{1}{n+1}\right) \geq 0$$

È una serie a segno alterno.
Uso Leibniz.

$$a_n = \sqrt[3]{\sin\left(\frac{1}{n+1}\right)}$$

① $\lim_{n\to\infty} a_n \overset{?}{=} 0$. Sì:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \sqrt[3]{\sin\left(\underbrace{\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1}}_{0}\right)} = 0.$$

② $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è decrescente. Sì. Infatti

$n \longmapsto n+1$ cresce

$n \longmapsto \frac{1}{n+1}$ decresce

$n \longmapsto \sin\left(\frac{1}{n+1}\right)$ decresce
sì perché
$\sin x$ cresce
per $[0, \pi/2]$

Infine

$$n \longmapsto \underbrace{\sqrt[3]{\sin\left(\frac{1}{n+1}\right)}}_{a_n} \text{ decresce.}$$

Per il Cr. Leibniz la serie converge semplicemente.

ES. 6 Al variare di $x \in \mathbb{R}$ studiare la convergenza della ~~serie~~

$$\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{(-4)^n}{5^n \log(n+1)} (x^2-2x)^n}_{= a_n(x)} .$$

Riduzione. Non abbiamo serie a termini ≥ 0.
Prima cosa da fare: studiare la conv. assoluta
Devo studiare
$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n(x)| .$$

Provo con il criterio della radice:

$$\sqrt[n]{|a_n(x)|} = \sqrt[n]{\frac{4^n}{5^n \log(n+1)} |x^2-2x|^n}$$
$$= \frac{4}{5} \frac{1}{\sqrt[n]{\log(n+1)}} |x^2-2x|$$

Calcolo
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\log(n+1)} = \dots = 1$$

Conclusione:
$$L(x) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n(x)|} = \frac{4}{5} |x^2-2x|$$

C. Radice:

① $L(x) < 1 \Rightarrow$ Serie converge assolutamente
$\Downarrow$ C. Conv. Ass.
Serie converge semplicem.

Abbiamo
$$L(x) < 1 \iff |x^2-2x| < \frac{5}{4}$$
$$\iff \begin{cases} x^2-2x < 5/4 \\ x^2-2x > -5/4 \end{cases}$$

$$\iff -\frac{1}{2} < x < \frac{5}{2}$$

$\iff \quad -\frac{1}{2} < x < \frac{?}{2}$

C. Radice

② $L(x) > 1 \implies \boxed{\lim_{n\to\infty} |a_n(x)| \neq 0}$ $= +\infty$

(E in particolare non c'è CA)

$\lim_{n\to\infty} a_n(x) \neq 0$

Risultato che non c'è nemmeno Conv. Semplice.

Osservo che

$$L(x) > 1 \iff |x^2 - 2x| > \frac{5}{4}$$

$$\iff x \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{5}{2}, \infty\right)$$

Rimane da studiare il caso $L(x) = 1$

ovvero $x = -1/2$ oppure $x = 5/2$.

In entrambi i casi $x^2 - 2x = 5/4$ e quindi troviamo

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\log(n+1)}$$

Serie a segno alterno.

Conv. Semplice con Cr. Leibniz.

$$b_n = \frac{1}{\log(n+1)}$$

① $\lim_{n\to\infty} b_n \overset{?}{=} 0$ Sì $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\log(n+1)} = 0$

② $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è decrescente?

$n \longmapsto \log(n+1)$ cresce

$n \longmapsto \frac{1}{\log(n+1)}$ decresce sì.

Altro conto:

$$b_{n+1} \overset{?}{\leq} b_n \iff \frac{1}{\log(n+2)} \leq \frac{1}{\log(n+1)}$$

$\forall n \in \mathbb{N}$

$$\Leftrightarrow \log(n+2) \geq \log(n+1)$$

$$\Leftrightarrow n+2 \geq n+1$$

$$\Leftrightarrow 2 \geq 1 \quad \underline{\underline{ok}}$$

Per Leibniz: c'è conv. semplice.

Passo alla conv. assoluta:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\log(n+1)}$$

Confronto:

$$\log(n+1) \leq n \qquad \forall n \geq 1$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\log(n+1)} \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$$

la serie diverge.

$$(-1)^n \cdot (-1)^n = (-1)^{2n} = +1$$

<u>ES. 8</u> Studiare la conv. della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\sin(\sin n)\right]^n .$$

Parto con la conv. assoluta

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\sin(\sin n)|^{n} \leq \sum q^n$$

$$|\sin n| \leq 1$$

$$|\sin(\sin n)| \leq \underset{\substack{\shortparallel \\ q}}{|\sin 1|} < 1$$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} |f(x)| = 0$$

$$|f(x) - 0| < \varepsilon \; . -$$

$$|f(x)| < \varepsilon$$